ANNALES

DE

RADIOÉLECTRICITÉ

COMPAGNIES FRANÇAISES ASSOCIÉES DE T.S.F.

79, Boulevard Haussmann, 79

PARIS

REVUE TRIMESTRIELLE

TOME VI. JUILLET 1951. N° 25.

ERRATA.

Annales de Radioélectricité, tome VI, n° 24, avril 1951.

Article de M. Édouard REGENSTREIF, *Théorie de la lentille électrostatique à trois électrodes.*

Page 131, relations (209), ***lire***

$$r_3 = Ez + F$$

Page 138, relation (251), ***lire***

$$(251) \quad \lambda_2^2 = \frac{2kx + (1-x)\left\{2k^2 - \left(\frac{A}{z_0}\right)^2 [1 \mp \sin^2(\alpha_0 - \varphi)]\right\}}{\left\{\begin{array}{l} 2(1-k) + (1-x) \\ \quad \times \left[\pm \left(\frac{A}{z_0}\right)^2 \cos^2(\alpha_0 - \varphi) - 2(1-k)^2\right] \end{array}\right\}}$$

relation (251′), ***lire***

$$(251') \quad \lambda_2'^2 = \frac{2kx + (1-x)\left\{2k^2 - \left(\frac{A}{z_0}\right)^2 [1 \mp \sin^2(\alpha_0' + \varphi)]\right\}}{\left\{\begin{array}{l} 2(1-k) + (1-x) \\ \quad \times \left[\pm \left(\frac{A}{z_0}\right)^2 \cos^2(\alpha_0' + \varphi) - 2(1-k)^2\right] \end{array}\right\}}$$

Page 148, relations (319), ***lire***

$$\lambda_2^2 = \frac{\left\{\begin{array}{l} 2(k-k_1)(1-k_1) + (1-x) \\ \quad \times \left\{2(k-k_1)^2 - \left(\frac{A_2}{z_2}\right)^2 [1 \mp \sin^2(\alpha_2 - \varphi_2)]\right\} \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} 2(1-k)(1-k_1) + (1-x) \\ \quad \times \left[\pm \left(\frac{A^2}{z^2}\right)^2 \cos^2(\alpha_2 - \varphi_2) - 2(1-k)^2\right] \end{array}\right\}}$$

Page 154, relation (VII), ***lire***

$$(\text{VII}) \quad \lambda_2^2 = \frac{2kx + (1-x)\left\{2k^2 - \left(\frac{A}{z_0}\right)^2 [1 \mp \sin^2(\alpha_0 - \varphi)]\right\}}{\left\{\begin{array}{l} 2(1-k) + (1-x) \\ \quad \times \left[\pm \left(\frac{A}{z_0}\right)^2 \cos^2(\alpha_0 - \varphi) - 2(1-k)^2\right] \end{array}\right\}}$$

relation (VII′), ***lire***

$$(\text{VII}') \quad \lambda_2'^2 = \frac{2kx + (1-x)\left\{2k^2 - \left(\frac{A}{z_0}\right)^2 [1 \mp \sin^2(\alpha_0' + \varphi)]\right\}}{\left\{\begin{array}{l} 2(1-k) + (1-x) \\ \quad \times \left[\pm \left(\frac{A}{z_0}\right)^2 \cos^2(\alpha_0' + \varphi) - 2(1-k)^2\right] \end{array}\right\}}$$

TOME VI — JUILLET 1951 — N° 25

ANNALES
DE
RADIOÉLECTRICITÉ

COMPAGNIES FRANÇAISES ASSOCIÉES DE T. S. F.

COMPAGNIE GÉNÉRALE DE TÉLÉGRAPHIE SANS FIL
SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIO-ÉLECTRIQUE
LA RADIOTECHNIQUE
COMPAGNIE RADIO-FRANCE
COMPAGNIE RADIO-MARITIME
RADIO-ORIENT
COMPAGNIE RADIO-CINÉMA
ÉTABLISSEMENTS E. ROBERT ET CIE (LA STÉATITE INDUSTRIELLE)
SOCIÉTÉ DE TRAITEMENTS ÉLECTROLYTIQUES ET ÉLECTROTHERMIQUES (STEL)
SOCIÉTÉ ANONYME LE CONDENSATEUR CÉRAMIQUE (L. C. C.)

79, Boulevard Haussmann, PARIS

SOMMAIRE

Prière d'adresser toute correspondance à la Compagnie Générale de T. S. F., Centre d'Information et de Documentation, [redacted] Paris (19e).
10, rue Carducci,

SUR LA RÉCEPTION TRANSATLANTIQUE DES FRÉQUENCES DE L'ORDRE DE 30 MHZ.

PAR J. MAIRE,

Ingénieur E.S.E.
Chef du Centre de réception de Villecresnes, à la Compagnie Radio-France.

SOMMAIRE. — *L'auteur communique les résultats d'écoutes systématiques effectuées sur ces fréquences au Centre de Réception de la Compagnie Radio-France à Villecresnes, situé à une vingtaine de kilomètres au sud-est de Paris.*

Les conditions de réception observées sur deux trajets transatlantiques (Amérique du Nord, France et Amérique du Sud, France) sont analysées successivement.

Sur le plan de l'exploitation commerciale, l'auteur signale en outre, l'intérêt présenté par ces fréquences pour certains besoins particuliers. (C. D. U. 621.396.11.)

SUMMARY. — *Results of reception at these frequencies recorded systematically at Compagnie Radio France Receiving Station, Villecresnes, 20 kilometers South East of Paris, are given.*

Reception conditions on two transatlantic paths (North America-France and South Aemrica-France) are examined.

The interest lying in these frequencies for some particular applications in commercial operation is mentioned. (U. D. C. 621.396.11.)

1. Considérations générales.

Le spectre des fréquences utilisées normalement dans l'exploitation commerciale des grands circuits transcontinentaux s'étend pratiquement de 4 à 24 MHz (75 m $< \lambda <$ 12,50 m).

Mais on a constaté que, sur un trajet déterminé, la gamme des fréquences utiles devait subir à l'intérieur du spectre délimité ci-dessus une translation commandée par les variations de l'activité solaire.

En outre, et comme le montre la figure 1, le cycle undécennal de ces variations n'est pas symétrique. On voit, en effet, que le cycle qui présentait sa phase minimum au cours des années 1933-1934 a atteint son maximum dès 1937. Le même phénomène s'est reproduit pour le cycle actuellement en cours et cette dissymétrie qui est bien connue : croissance de l'activité solaire plus rapide que la décroissance, fait qu'en l'espace de trois années seulement, l'activité solaire est passée d'un quasi minimum à un maximum d'amplitude considérable.

Du point de vue de l'exploitation des liaisons commerciales, ceci conduit à faire subir en même temps à la gamme des fréquences utilisées (ondes décamétriques) une translation rapide vers les fréquences plus élevées.

La figure 2 montre l'importance de cette translation sur le trajet New-York-Paris. Elle est de l'ordre de 6 MHz.

Il était donc intéressant de rechercher quelle était pratiquement la limite du spectre des fréquences utilisables sur ce trajet du côté des fréquences les plus élevées.

D'autre part, les sondages systématiques de l'ionosphère effectués dans divers pays depuis de nombreuses années déjà ont permis de préciser l'influence de ces variations de l'activité solaire et de constituer une documentation statistique désormais suffisante pour en déduire des prévisions à longue échéance des conditions ionosphériques et, par suite, des fréquences à utiliser pour réaliser dans les meilleures conditions une liaison déterminée.

Et dans la phase du maximum du cycle solaire, ces prévisions indiquent pour certains trajets une fréquence maximum utilisable (FMU) et même une fréquence optimum de trafic (FOT) nettement supérieures à la limite de 24 MHz citée ci-dessus.

Il est donc également extrêmement intéressant

de confronter ces prévisions obtenues généralement à l'aide de sondages verticaux de l'ionosphère aux nerons à citer quelques travaux parmi les plus anciens [1], [2].

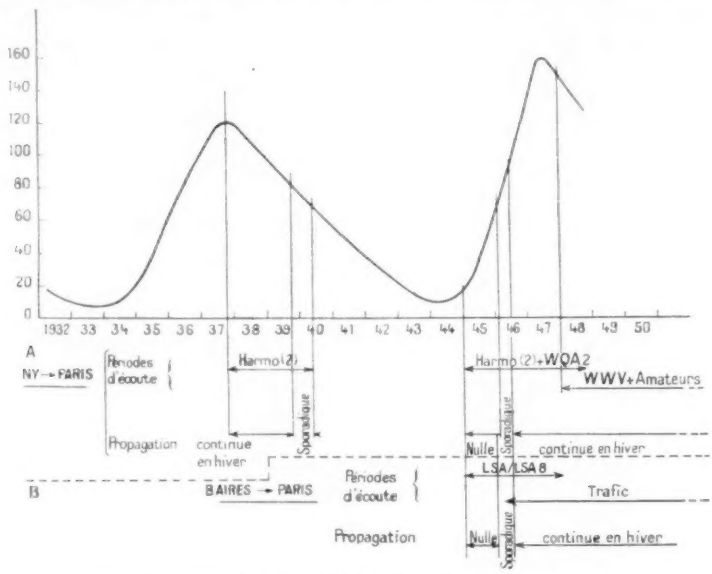


Fig. 1. — Situation des périodes d'écoute dans le cycle solaire.

résultats obtenus par des écoutes réelles constituant pratiquement des sondages obliques.

Cette Note a pour but de présenter notre modeste

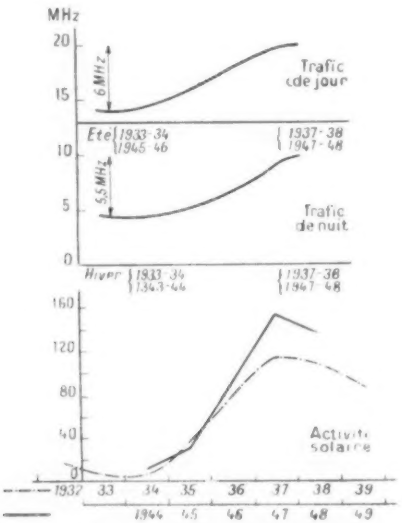


Fig. 2. — Trajet New-York-Paris. Translation des fréquences utilisées en fonction des variations de l'activité solaire.

contribution dans ces domaines où des chercheurs déjà nombreux nous ont précédé. Nous nous bornerons à citer quelques travaux parmi les plus anciens [1], [2].

Nos efforts ont porté sur deux grands circuits qui, du point de vue ionosphérique comme du point de vue commercial, présentent un intérêt considérable : il s'agit, d'une part, du trajet Amérique du Nord-Europe et, d'autre part, du trajet Amérique du Sud-Europe.

2. Trajet Amérique du Nord-Europe.

2.1. Nature des écoutes. — Les résultats donnés ci-dessous sont relatifs à la réception à Villecresnes (02 32 38 E-48 42 54 N) d'émetteurs situés dans la zone orientale des États-Unis et principalement dans la région de New-York.

Les écoutes ainsi effectuées se répartissent sur trois périodes continues, savoir :

a. D'octobre 1937 à mai 1940 inclus. — Écoute des fréquences harmoniques d'ordre 2 d'émetteurs de « Radio Corporation » (RCA). Les événements de guerre n'ont pas permis la publication des résultats obtenus à cette époque.

b. De janvier 1945 à août 1948 inclus. — Reprise de ces écoutes sur les mêmes bases, mais accompagnées d'écoutes de quelques émetteurs sur leur fréquence fondamentale.

c. De janvier 1948 et en cours actuellement. — Écoute des fréquences-étalon émises sur 25, 30

et 35 MHz par l'émetteur WWV du « National Bureau of Standards », à Washington.

Écoute du réseau d'amateurs américains (U.S.A.) de la bande 30 MHz.

2.2. Matériel utilisé. — Les aériens de réception étaient constitués soit par un dipôle horizontal établi pour la fréquence de 30 MHz, soit par des aériens unidirectionnels du type « Losange » destinés à la gamme commerciale. Ce sont ces derniers qui ont donné comparativement les meilleurs résultats.

Les récepteurs étaient soit du type à superréaction, soit du type professionnel à double changement de fréquence.

2.3. Fréquences observées. — 2.31. *Fréquences harmoniques.* — Les fréquences harmoniques d'ordre 2 des stations commerciales qui ont été le plus souvent en observation sont données dans le tableau ci-dessous :

Fréquences fondamentales (MHz).	Indicatifs.	Fréquences harmoniques (MHz).
13,435	WKD	26,870
13,450	WEX	26,900
13,465	WKC	26,930
13,885	WQT	27,770
14,770	WEB	29,540
14,800	WQV	29,600
14,830	WKU	29,650

Tous ces émetteurs étaient situés à Rocky-Point (N.Y.) dont les coordonnées géographiques sont : 72 56 30 W-40 55 45 N.

2.32. *Fréquences fondamentales.* — Des résultats sporadiques ont été obtenus au début de l'hiver 1938-1939 sur l'émetteur :

W2XS, 35,380 MHz (λ : 8,47 m).

Nous avons aussi recherché régulièrement l'émetteur :

WQA2, 31,420 MHz (λ : 9,54 m).

qui a été perçu à partir de janvier 1946 et jusqu'en mars 1948, époque où son écoute a été abandonnée et remplacée par l'écoute des fréquences étalon émises par la station WWV du « National Bureau of Standards », à Washington sur 25, 30 et 35 MHz. Cette dernière écoute était complétée par des mesures quasi horaires des tensions appliquées à l'entrée du récepteur constituant ainsi des mesures relatives du champ.

D'autre part, et simultanément, nous avons entrepris l'écoute du réseau d'amateurs américains (U.S.A.) travaillant avec l'Europe en radiotéléphonie dans la bande qui leur est réservée (28,5 à 29,7 MHz) et avec des systèmes à modulation d'amplitude à deux bandes latérales (A 3).

Ce réseau est très dense et les indicatifs relevés permettent de situer l'émetteur dans une zone assez bien déterminée des États-Unis, mais comprenant cependant de façon générale plusieurs États.

Dans les résultats présentés ci-dessous, nous n'avons retenu que les émetteurs de la zone dite « Orientale » et spécialement les émetteurs situés dans les États de New-Jersey et de New-York dont les indicatifs commencent par les signes W 2.

Dans les périodes favorables, ces émetteurs sont généralement reçus dans de bonnes conditions malgré leur faible puissance.

A titre de renseignements, nous signalerons que nous avons entendu au cours de ces écoutes des amateurs situés dans toutes les zones des États-Unis et dont les indicatifs de position s'échelonnent de W 0 (zéro) à W 9. Il existait cependant une prédominance marquée pour ceux des zones W 2 (États de New-Jersey et New-York) et W 4 dans la région du Golfe du Mexique (Alabama, Floride, Géorgie, Kentucky, Carolines du Nord et du Sud, Tennessee, Virginie).

2.4. Résultats. — Les résultats obtenus au cours de ces écoutes sont résumés graphiquement. Ils nécessiteront ainsi moins de commentaires.

La figure 1 situe les différentes périodes d'écoutes par rapport au cycle de l'activité solaire.

On voit que la première série d'écoutes se situe dans la phase quasi maximum, puis dans la phase décroissante du cycle précédent.

La seconde série débute en 1945 à la fin de la phase minimum, s'étend sur la phase croissante, sur la phase maximum et sur le début de la phase décroissante du cycle actuel.

La troisième série se situe sur le début de la phase décroissante; elle est en cours actuellement.

Pour ces deux dernières séries et, comme on le verra ci-dessous, la réception nulle en 1945, devient sporadique au début de l'année 1946, puis continue pendant toutes les saisons d'hiver à partir d'ocrobre 1946.

La figure 3 donne les résultats de la première série d'écoutes (harmoniques).

Nous avons reporté sur cette figure la courbe des couchers de soleil au milieu du parcours le 15 de chaque mois. On voit que cette courbe limite assez bien la période de réception en soirée de ces fréquences.

La figure 4 montre l'amélioration progressive des conditions de réception de ces fréquences à mesure que l'activité solaire croît.

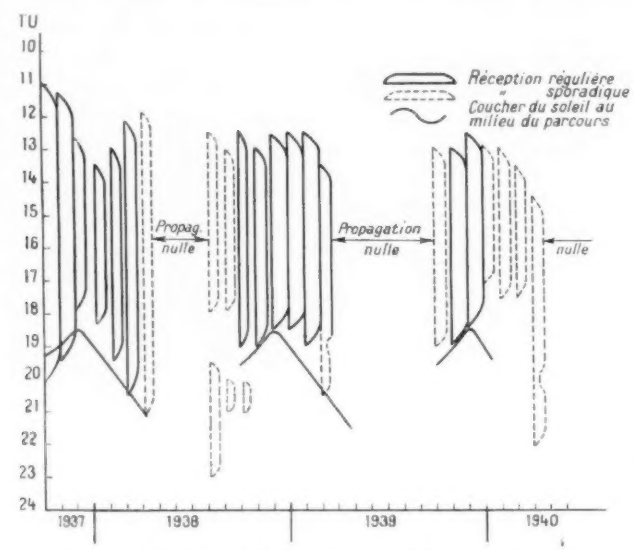


Fig. 3. — Trajet New-York-Paris. Propagation des harmoniques (2). Bande 26, 87-29, 66 MHz.

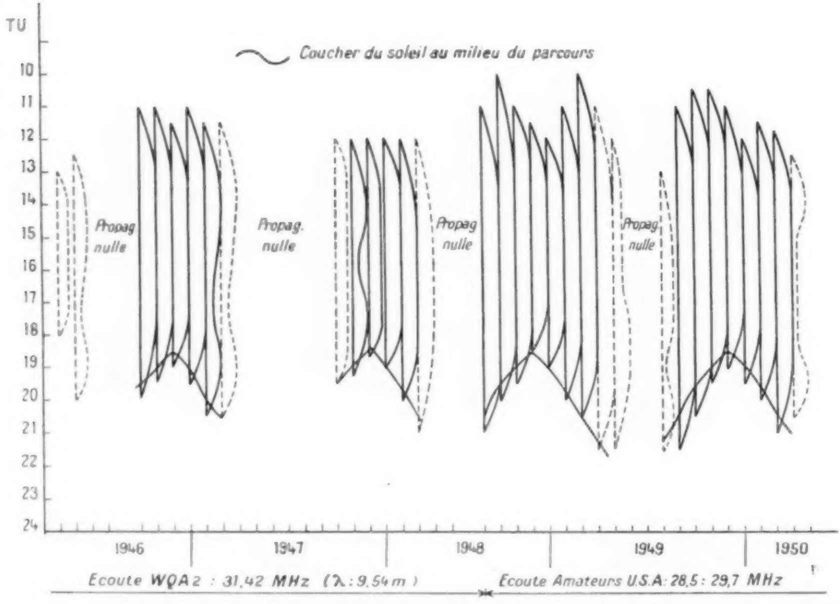


Fig. 4. — Trajet New-York-Paris. Résultats des écoutes de janvier 1945 à avril 1950 inclus.

Sur la partie de cette figure relative à l'écoute du réseau d'amateurs USA et qui est celle à laquelle nous attacherons la plus grande valeur à cause de la densité de ce réseau et de la plus grande attention avec laquelle il a pu être suivi, nous avons encore tracé cette courbe des couchers de soleil le 15 du mois au milieu du parcours. On retrouve la concordance signalée à propos de la figure 3. Peut-on en conclure qu'à ce moment tout au moins l'une

des zones de réfraction du faisceau sur l'ionosphère se produit précisément au milieu du parcours et que le coucher du soleil au voisinage de ce point interrompt définitivement la propagation ?

Nous avons d'autre part dans la figure 5 comparé ces résultats avec les précisions qui nous sont communiquées par le Bureau Ionosphèrique Français et nous avons reporté sur la même courbe les périodes pendant lesquelles ces fréquences paraissaient pouvoir être utilisées.

En examinant cette superposition, on peut faire les remarques suivantes :

Saison d'hiver 1948-1949. — D'octobre à février inclus, les prévisions sont conformes aux résultats pratiques. L'écart se manifeste principalement pour les mois de septembre et mars pour lesquels la propagation de ces fréquences n'était pas prévue.

D'autre part, les prévisions fixent vers 1900 TU pour toute la saison la fin de la période de propagation alors que, comme nous avons tenté de le montrer, cette limite semble varier et s'échelonner sur une période de 3 h environ.

Saison d'hiver 1949-1950. — Les prévisions sont meilleures en soirée pour les mois d'octobre, novembre et décembre. Par contre, la propagation n'était pas prévue pour les mois de septembre et mars alors que de longues périodes de passage ont été observées.

Ces remarques sont seulement destinées à montrer tout l'intérêt qui s'attache à la confrontation des prévisions avec les résultats obtenus pratiquement.

3. Trajet Amérique du Sud-Europe.

Sur le trajet Buenos-Aires-Paris, en dehors de périodes d'essais sur des fréquences telles que

LSX 9 31,420 MHz (novembre 1938),
LSA 8 31,380 MHz (années 1946-1947)

et pendant lesquelles des résultats, en général sporadiques, ont été obtenus, une liaison commerciale régulière a pu être établie à partir d'octobre 1946 sur des fréquences de l'ordre de 27,5 MHz.

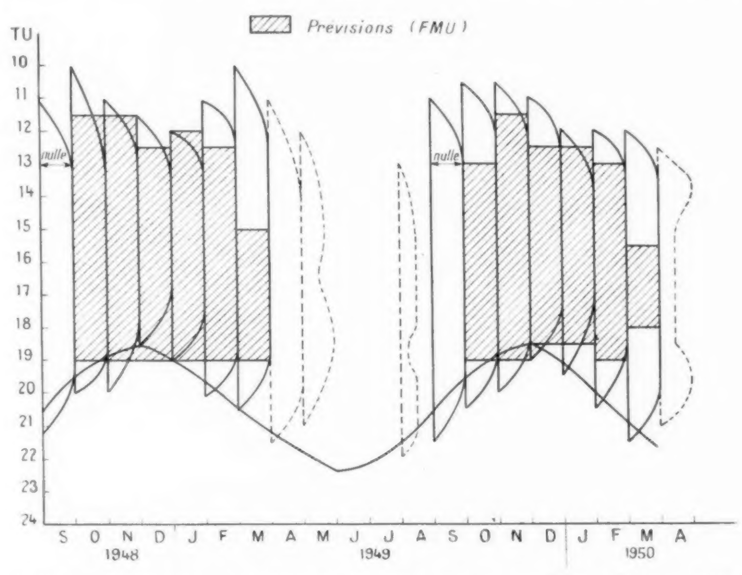


Fig. 5. — Comparaison des résultats d'écoutes avec les prévisions du LNR (BIF).

La figure 6 indique les périodes pendant lesquelles une réception commerciale a pu être réalisée.

On remarquera qu'à partir d'octobre 1946 et jusqu'à avril 1950 inclus la liaison commerciale a pu être assurée dans de bonnes conditions pendant une grande partie du jour (sauf en août 1949, période pendant laquelle les champs étaient faibles).

Nous insisterons plus loin sur l'intérêt que présentent ces fréquences sur ce parcours.

4. Conclusions.

4.1. Ces fréquences ne peuvent être utilisées commercialement que dans les années situées dans

la phase voisine du maximum du cycle undécennal de l'activité solaire.

4.2. A cette époque, et sur les trajets Est ⇄ Ouest, elles sont reçues assez régulièrement d'octobre à mars, elles ne le sont que d'une façon intermittente en avril et elles disparaissent à peu près complètement en mai, juin, juillet, août et septembre.

Sur les trajets Nord-Sud ou quasi Nord-Sud, le parcours intéressant les deux hémisphères, elles sont reçues correctement pendant toute l'année.

4.3. L'utilisation commerciale de ces fréquences semble réservée aux très longs circuits (supérieurs à 4 000 km pour fixer un ordre de grandeur) pour lesquels l'angle d'incidence du rayon sur la couche F_2 est suffisamment grand pour permettre la réfraction.

4.4 Ces fréquences se trouvant à la limite du spectre utilisable sont extrêmement sensibles aux perturbatiohs ionosphériques concomitantes des perturbations magnétiques.

Par suite, les parcours Nord ⇄ Sud ou quasi Nord-Sud qui évitent la proximité des pôles magnétiques et du cercle auroral se prêtent mieux que les parcours Est ⇄ Ouest à leur utilisation.

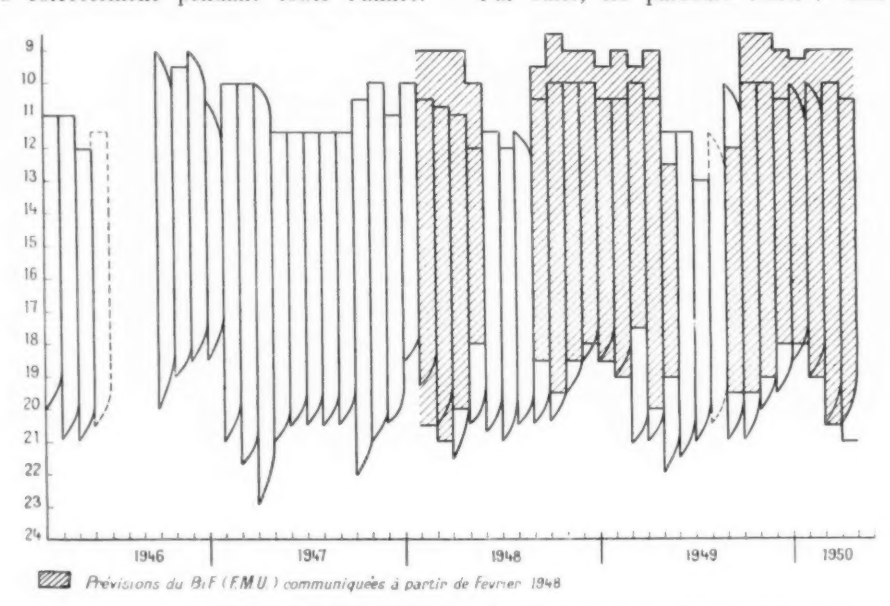


Fig. 6. — Trajet Buenos-Aires-Paris. Périodes d'utilisation commerciale de fréquences comprises entre 27,4 et 27,67 MHz.

Sur ces deux trajets elles ne sont reçues convenablement que pendant le temps où l'illumination du parcours est totale, avec cependant une prolongation très nette sur la période crépusculaire.

Sur le trajet New-York-Paris, c'est en effet la courbe des couchers de soleil au milieu du parcours qui fixe la limite extrême de la réception.

Ces résultats s'expliquent en grande partie à l'aide des données fournies par l'étude de l'ionosphère et spécielement des anomalies de la couche F_2.

De très nombreux travaux et, en particulier, de longues séries de mesures effectuées tant aux États-Unis qu'en Angleterre ont permis d'éclaircir cette question mais certains points relatifs à la recherche des causes restent encore assez obscurs.

Nous ne rappellerons à ce sujet que quelques travaux parmi les importantes recherches de Sir E. Appleton et de ses collaborateurs [3], [4], [5], [6].

4.5. Ces fréquences sont moins affectées que les fréquences du spectre normal par le phénomène « d'écho tour du monde ». Et c'est sans doute le fait le plus important du point de vue pratique.

En effet, le trajet Buenos-Aires-Paris est gravement perturbé par ce phénomène dans la période de jour et sur toutes les fréquences du spectre commercial utilisable dans cette période.

Il se présente avec la plus grande intensité d'octobre à mars le matin entre 7 et 10-11 TU. La période d'écho se déplace ensuite rapidement en avril où elle se situe au milieu de l'après-midi à Paris pour se manifester avec une grande intensité de mai en août en soirée de 19 à 22-23 TU, c'est-à

dire avec très sensiblement 12 h de décalage par rapport à la saison d'octobre à mars. Elle se situe à nouveau au milieu de l'après-midi en septembre.

De mai à août et en soirée, dans la période où le grand cercle du parcours se trouve situé dans la zone de pénombre qui ceinture le globe terrestre, le phénomène prend souvent l'aspect d'échos multiples.

L'examen de ces signaux à l'oscillographe a montré la complexité des trajets et une description plus détaillée en a été donnée antérieurement [9].

En particulier, le signal peut parcourir le petit arc du grand cercle reliant les deux correspondants augmenté d'une ou plusieurs fois le tour du monde, si bien que le signal parasite attaque les aériens du même côté que le signal utile avec un retard relativement considérable et que la protection obtenue en inversant le sens de projection des antennes pour utiliser la propagation par l'arc majeur devient totalement inefficace.

Et à l'heure actuelle, le procédé qui consiste à augmenter la valeur des fréquences utilisées jusqu'à ce que la propagation par l'arc majeur cesse est encore celui qui a donné les meilleurs résultats. L'amélioration n'est parfois obtenue qu'en consentant un sacrifice sur la valeur du champ de l'onde reçue, mais ce sacrifice est justifié par l'avantage recueilli en exploitation commerciale par la suppression de l'écho.

L'établissement d'une liaison régulière sur ces fréquences sur le trajet Buenos-Aires-Paris s'explique donc surtout de cette façon.

5. Avantages accessoires de ces fréquences.

5.1. Prévisions a brève échéance des conditions de propagation. — La sensibilité de la propagation de ces fréquences aux perturbations ionosphériques peut être utilisée pour caractériser les conditions générales de propagation des ondes décamétriques au cours d'une journée. L'écoute de ces fréquences qui peut être renforcée par une analyse oscillographique des signaux peut permettre à l'exploitant des prévisions à brève échéance qui lui seront fort utiles.

5.2. Perturbations ionosphériques a début brusque (PIBD). — Des travaux considérables ont été effectués sur ces perturbations de caractères très particuliers, et le sujet est si vaste qu'il est loin d'être épuisé. Il est toutefois bien établi qu'il a pour cause les éruptions chromosphériques solaires.

En ce qui concerne la France, le nom de R. Bureau est attaché, en particulier, à ce phénomène qu'il a relié dès 1936 aux renforcements brusques du niveau des atmosphériques observés sur certaines ondes myriamétriques.

Ses travaux sur les divers aspects de la question sont toujours en cours. Ceux qui ont été publiés sont nombreux et bien connus.

Il a fait remarquer que tout le spectre des ondes décamétriques n'était pas affecté avec la même intensité par ce phénomène, et que l'ionisation brutale de la couche D qui l'expliquait, devait provoquer une absorption d'autant moins intense que les fréquences étaient plus élevées [7].

Toutefois, il a signalé récemment [8] certaines anomalies dans ce domaine.

Pour notre part, nous avons observé assez souvent, mais sans que ce soit le cas général, que les fréquences de l'ordre de 30 MHz nous permettaient de conserver le contact avec nos correspondants alors que les liaisons assurées sur des fréquences de la gamme commerciale normale étaient interrompues par ce phénomène. Et dans la presque totalité des cas, où ces fréquences étaient elles-mêmes affectées, nous avons constaté que la durée de l'interruption était réduite car ces fréquences étaient celles qui réapparaissaient les premières parmi celles du spectre utilisé sur les différents circuits.

Ceci constitue encore un avantage appréciable à mettre à l'actif de ces fréquences.

On sait que ce phénomène est inverse de celui qui se produit lors des orages ionosphériques du type normal. A ce moment, l'on doit au contraire abaisser les fréquences de trafic pour conserver le contact.

6. Résumé.

En résumé, nous sommes conduit à penser que dans l'état actuel de la technique, les fréquences de l'ordre de 30 MHz présentent peu d'intérêt sur le parcours New-York ⇄ Paris où les fréquences du spectre commercial normal permettent d'assurer un excellent contact avec plus de sécurité.

Elles sont, au contraire, intéressantes sur le parcours Buenos-Aires ⇄ Paris puisqu'elles permettent de se libérer presque complètement des perturbations dues à la propagation par l'arc majeur (Écho).

Et l'intérêt accessoire qu'elles présentent, d'autre part, dans certains cas particuliers n'est pas non plus négligeable.

BIBLIOGRAPHIE.

1. H. H. BEVERAGE, H. O. PETERSON and C. W. HANSELL, *Application of frequencies above* 30 000 kc *to communication problems* (*Proc. I.R.E.*, vol. 19, nº 8, 1931, o. 1313).
2. KEN-ICHI MAEDA and TARO FUKADA, *On the propagation of high-frequency radio-waves of about* 30 Mc : s (*Report of Radio Research in Japan*, vol. 7, nº 2, 1937, p. 97).
3. Prof. E. V. APPLETON, *Radiotransmission and Solar activity* (*Nature*, vol. 142, 1938, p. 499).
4. Prof. E. V. APPLETON, *Two anomalies in the ionosphere* (*Nature*, vol. 157, 1946, p. 691).
5. BRITISH NATIONAL COMMITTEE FOR SCIENTIFIC RADIO, *Report on British Ionospheric work* 1938-1946 (*C.R. Ursi*, vol. VI, 1946, p. 119-121).
6. E. V. APPLETON and W. J. G. BEYNON, *Some unsolved problems of the ionosphere* (*C. R. de la Commission mixte de l'ionosphère*, Bruxelles, 1948, p. 90-96).
7. R. BUREAU, *Le spectre radioélectrique des perturbations ionosphériques à début brusque* (*Notes préliminaires du Laboratoire National de Radioélectricité*, nº 19, août 1941).
8. R. BUREAU, *Les renforcements brusques des ondes très longues* (*Proc. Phys. Soc.* B, vol. 63, 1950, p. 122).
9. J. MAIRE, *L'exploitation des communications radioélectriques sur ondes courtes* (*Bull. Soc. franç. Électr.*, nº 79, 1937, p. 10-11).

ÉTUDE DE LA DIFFRACTION DES ÉCRANS PLANS ET APPLICATION AUX LENTILLES HERTZIENNES.

PAR J. C. SIMON,

RÉSUMÉ. — Chapitre I. — *Soit un écran plan infiniment conducteur percé d'ouvertures quelconques, nous cherchons à étudier le régime d'ondes qui s'établit lorsqu'on dispose des sources éloignées de cet écran. Pour cela nous utilisons des champs de perturbation dont nous précisons les conditions aux limites. Ces champs de perturbation ajoutés à l'onde existant en l'absence d'écran ou à l'onde existant en présence d'un écran indéfini, permettent de poser le problème dans le cas général. De la possibilité de poser le problème à partir de deux ondes, celle de l'espace indéfini, celle de l'espace limité par un écran plan, nous déduisons naturellement le principe de Babinet qui s'applique à des écrans complémentaires.*

Chapitre II. — *Nous étudions la diffraction d'une ouverture unique dans un écran plan métallique indéfini, lorsqu'elle est excitée par une onde plane dont la direction de propagation est normale au plan de l'écran. Pour résoudre ce problème par le calcul, il existe deux méthodes : la méthode des fonctions propres qui s'applique dans quelques cas particuliers, la méthode des sources auxiliaires liée à la notion de fonction de Green. Nous utilisons la seconde méthode pour poser le problème général. Nous pouvons ainsi examiner le problème de l'ouverture de dimensions petites devant la longueur d'onde. Nous discutons les résultats obtenus pour l'ouverture circulaire de diamètre petit devant la longueur d'onde. Nous proposons une approximation de l'équation intégrale du problème général de l'ouverture circulaire, qui nous permet de nous ramener au cas déjà résolu de l'Acoustique dans le cas où le diamètre de l'ouverture est comparable à la longueur d'onde. Nous examinons enfin l'ouverture possédant deux axes de symétrie rectangulaire.*

Chapitre III. — *Nous étudions la diffraction d'un écran métallique plan percé d'ouvertures égales régulièrement disposées, attaqué par une onde plane en incidence normale. Dans le cas où les ouvertures possèdent des axes de symétrie et où leurs centres forment un quadrillage, on peut se ramener à un problème dans un guide d'onde rectangulaire dont deux parois sont d'impédance nulle, les deux autres étant d'impédance infinie. Nous étudions les différents modes de ce guide qui possède une onde principale. Dans le cas où la distance des centres est inférieure à la longueur d'onde, seul peut se propager le mode de l'onde principale. Un tel écran se ramène à une impédance classique. Nous mettons au point et nous discutons une méthode de mesure du coefficient de transmission (amplitude et phase). Des résultats des mesures nous déduisons la notion de pseudo coupure pour une ouverture, par analogie au phénomène de coupure dans un guide d'onde. Au-dessus de la pseudo coupure, l'écran est plus transparent que ne le laisse supposer l'optique classique, inversement au-dessous.*

Chapitre IV. — *L'étude de la transmission en incidence oblique de l'écran précédent nous montre que la polarisation de l'onde transmise n'est pas changée si le plan de polarisation de l'onde incidente est normal ou parallèle au plan d'incidence. Les variations de la phase de l'onde transmise dans ces deux cas en fonction de l'inclinaison permettent de rapprocher ce phénomène de l'indice ordinaire et extraordinaire dans les cristaux uniaxes. Les variations de l'amplitude permettent de retrouver des lois analogues aux lois de Fresnel.*

Chapitre V. — *La mesure en incidence normale du module du coefficient de transmission nous permet de connaître le déphasage de l'onde transmise. En empilant plusieurs plaques à des distances convenables, nous pouvons créer un milieu pour lequel la vitesse de phase d'une onde est supérieure à celle du vide, c'est-à-dire un milieu d'indice inférieur à l'unité. Nous pouvons construire des lentilles hertziennes en réalisant un milieu d'épaisseur constante (plaques*

parallèles) et d'indice variable (dimension variable des ouvertures). La mesure directe des surfaces de phase permet de le vérifier. Nous donnons des exemples de réalisation. Nous retrouvons au sujet de ces lentilles les mêmes problèmes d'aberrations qu'en Optique classique, aberrations chromatiques, aberrations géométriques. Ces lentilles peuvent nous permettre, outre le déphasage d'une onde sphérique, la correction point par point d'aberrations géométriques. On peut les rapprocher des optiques de Schmidt connus en Optique instrumentale.
Des aériens utilisant ces dispositifs ont été construits, ils ont permis d'obtenir des faisceaux hertziens à 3600 Mc, *d'angle* total *au sommet égal à* 1°35′ *à demi-puissance, dont la réaction sur la source est de l'ordre de* 1/400ᵉ *de la puissance émise dans une bande de* 200 Mc *et dont le gain et le rayonnement arrière sont meilleurs que ceux d'aériens usuels de mêmes dimensions.* (C. D. U. 621.3.016.31).

SUMMARY. — CHAP. I : *The general problem of diffraction by a plane screen of zero impedance can be solved by adding fields to the known solutions of the infinite full screen or of the empty space. The Babinet's Principle is derived from these two possibilities.*

CHAP. II : *The diffraction of a single aperture is discussed with the use of sources in the aperture. Two approximated solutions are proposed for the circular hole small compared with wavelength and of the order of wavelength.*

CHAP. III : *The diffraction, by a conducting screen with equal holes uniformely spaced, of a plane wave at normal incidence is studied. In the case of holes with symmetry axis, their centres being a lattice, the problem can be referred to the problem of a rectangular waveguide of which two walls are of zero impedance, the two others of infinite impedance. This waveguide has, like coaxials, a principal mode. When distances between centres is smaller than the wavelength, the principal mode propagates alone. Such a screen is then a classical impedance. A method of measurement of the transmission coefficient in amplitude and phase is discussed. Its results show a physical notion of cutoff for aperture anologous to that of waveguides.*

CHAP. IV : *The study of transmission for oblique incidence shows that polarisation is unchanged if the polarisation plane is normal or parallel to the incidence plane. The phase variations of the transmitted wave compares with the notions of ordinary and extraordinary propagation in optical cristallography.*

CHAP. V : *The measurement for normal incidence gave the phase shift of the transmitted wave through a screen. Several parallel screens equally spaced, compares with an inferior to one index medium. Lenses have been built of constant thickness and variable index (variable diameter of holes). Examples are given. Phase measurements of the transmitted wave show the possibility of very accurate phase correction like the optical Schmidt system. Owing to that possibility, an antenna of* $3 \times 3 \times 3$ m *built with lenses of this type has displayed somewhat better features than classical U. H. F. antennae for Gain, Diagramm, pencil beam of* 1° 35 *between* 3 db *points. Standing wave ratio less than* 1.12 *in a* 200 Mc *bandwidth at* 3 600 Mc. *Rear and side diffraction.* (U. D. C. 621.3.016.31.)

CHAPITRE I.

Étude du champ diffracté par un écran plan infiniment conducteur de forme quelconque.

Énoncé du problème.

Soit un plan *xoy*, *oz* une normale à ce plan. Disposons dans ce plan *xoy* des conducteurs métalliques infiniment minces, mais de contours quelconques. Soit *S* l'ensemble des portions de surface du plan *xoy* occupé par les conducteurs, et Σ l'ensemble des portions inoccupées. Supposons de plus que les conducteurs sont parfaits, c'est-à-dire que lorsque *z* tend vers zéro par valeurs négatives ou positives le champ magnétique normal et le champ électrique tangentiel tendent vers zéro sur *S*.

Nous allons chercher à étudier le régime d'ondes qui s'établit lorsqu'un certain nombre de sources existent dans l'un des demi-espaces séparés l'un de l'autre par le plan *xoy*, $z < 0$ par exemple.

Utilisons pour poser le problème une méthode de « perturbation ». Nous connaissons évidemment la solution du problème, soit lorsque *S* recouvre entièrement *xoy* (plan métallique indéfini), soit

lorsque Σ recouvre xoy (absence d'écran). A partir de ces solutions, nous pouvons chercher à ajouter des champs dans les deux espaces $z > 0$ et $z < 0$ tels que la somme des champs initiaux et des champs de perturbation satisfassent aux conditions aux limites.

Malgré des points de départ différents, les deux façons de poser le problème doivent aboutir à la même solution, mais on comprend aisément, d'après l'idée même de perturbation, que dans le cas où S est grand devant Σ (petites ouvertures), on doive chercher à partir du champ qui existe derrière un plan métallique indéfini, et partir du champ de l'espace indéfini dans l'autre cas. Nous verrons que nous sommes ainsi amenés à poser le problème de manière très analogue, ce qui nous suggéra directement le principe des écrans complémentaires dit de Babinet.

Conditions aux limites.

CHAMP DE PERTURBATION DE L'ONDE RÉFLÉCHIE PAR L'ÉCRAN INDÉFINI. — Soit $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ le champ électromagnétique existant dans l'espace $z < 0$ dans le cas où xoy est un conducteur parfait. Il existe évidemment un champ nul dans l'espace $z > 0$.

Soient $\mathbf{E}' + \mathbf{E}'_1$, $\mathbf{H}' + \mathbf{H}'_1$, le champ existant dans l'espace $z < 0$ et $\mathbf{E}'_2$, $\mathbf{H}'_2$, le champ existant dans l'espace $z > 0$ en présence de l'écran du problème.

Écrivons les conditions aux limites sur xoy du côté des $z > 0$ et du côté des $z < 0$.

Dans S :

(I.1) $$\mathbf{E}'_{1T} = \mathbf{E}'_{2T} = 0,$$

car $E_T = H'_n = 0$ par hypothèse, ce qui entraîne

(I.2) $$H'_{1n} = H'_{2n} = 0,$$

(I.3) $$\frac{\partial H'_{1T}}{\partial z} = \frac{\partial H'_{2T}}{\partial z} = 0,$$

(I.4) $$\frac{\partial E'_{1n}}{\partial z} = \frac{\partial E'_{2n}}{\partial z} = 0,$$

Dans Σ :

(I.5) $$\mathbf{E}'_{1T} = \mathbf{E}'_{2T},$$

(I.6) $$H'_T + H'_{1T} = H'_{2T},$$

ce qui entraîne

(I.7) $$E'_{1n} + E'_n = E'_{2n},$$

(I.8) $$H'_{1n} = H'_{2n}.$$

Nous remarquons immédiatement l'égalité sur xoy des composantes tangentielles des champs électriques.

Or, on sait [1] qu'un champ électromagnétique est déterminé de façon unique par la donnée des composantes tangentielles du champ électrique ou du champ magnétique sur une surface fermée. On en déduit simplement, ainsi que l'a remarqué Vasseur [2] grâce à la notion de fonction de Green,

(I.9) $$E'_{1x}(x, y, -z) = E'_{2x}(x, y, z),$$

(I.10) $$E'_{1y}(x, y, -z) = E'_{2y}(x, y, z),$$

(I.11) $$E'_{1z}(x, y, -z) = -E'_{2z}(x, y, z),$$

(I.12) $$H'_{1x}(x, y, -z) = -H'_{2x}(x, y, z),$$

(I.13) $$H'_{1y}(x, y, -z) = -H'_{2y}(x, y, z),$$

(I.14) $$H'_{1z}(x, y, -z) = H'_{2z}(x, y, z).$$

Les champs $\mathbf{E}'_1$, $\mathbf{H}'_1$ et $\mathbf{E}'_2$, $\mathbf{H}'_2$ ont des amplitudes égales, mais se propagent dans des directions opposées. Il nous suffit donc de déterminer le seul champ $\mathbf{E}'_2$, $\mathbf{H}'_2$, par exemple. Des relations (I.12), (I.13) et (I.6) nous déduisons

(I.15) $$\mathbf{H}'_{2T} = \frac{1}{2}\mathbf{H}'_T \quad \text{sur } S.$$

Cette dernière relation et l'une des relations (I.1) (I.2), (I.3), (I.4) suffit à fixer les conditions aux limites.

En définitive, nous avons pour conditions aux limites du champ $\mathbf{E}'_2$, $\mathbf{H}'_2$

(I.15) $$\mathbf{H}'_{2T} = \frac{1}{2}\mathbf{H}'_T \quad \text{sur } \Sigma,$$

(I.16) $$\frac{\partial H'_{2T}}{\partial z} = 0, \quad \text{sur } S.$$

Remarquons que nous pouvons déduire de la relation (I.15) et de l'une des équations de Maxwell

(I.16) $$E'_{2n} = \frac{1}{2}E'_n \quad \text{sur } \Sigma.$$

Cette méthode de poser le problème a été publiée par Bethe [3] lors de sa solution de la diffraction d'une petite ouverture circulaire dans un écran métallique indéfini. Dans ce problème, il est tout à fait justifié de partir du champ $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ et de chercher à calculer le champ de perturbation $\mathbf{E}'_2$, $\mathbf{H}'_2$ que l'on conçoit physiquement comme petit devant $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$.

Champ de perturbation de l'onde de l'espace indéfini. — Soit $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ le champ existant dans l'espace complet $z > 0$ et $z < 0$ en l'absence d'écran.

Soit $\mathbf{E} + \mathbf{E}_1$, $\mathbf{H} + \mathbf{H}_1$, le champ existant dans l'espace $z < 0$ et $\mathbf{E} + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{H} + \mathbf{H}_2$ le champ existant dans l'espace $z > 0$ en présence de l'écran du problème. De la même façon que précédemment, écrivons les conditions aux limites sur xoy du côté des $z > 0$ et du côté $z < 0$

(I.17) $$\mathbf{E}_{1T} = -\mathbf{E}_T, \qquad \mathbf{E}_{2T} = -\mathbf{E}_T \quad \text{dans } S.$$

qui entraînent

(I.18) $$H_{1n} = -H_n, \qquad H_{2n} = H_n.$$

En écrivant la continuité des champs dans Σ nous voyons disparaître des égalités les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ et il vient

$$\mathbf{E}_{2T} = \mathbf{E}_{1T}, \tag{I.19}$$

$$\mathbf{H}_{1T} = \mathbf{H}_{2T} \quad \text{dans } \Sigma, \tag{I.20}$$

d'où les équations

$$E_{1n} = E_{2n}, \qquad H_{1n} = H_{2n} \quad \text{dans } \Sigma. \tag{I.21}$$

Nous remarquons à nouveau l'égalité sur xoy des composantes tangentielles des champs électriques. Comme précédemment nous en déduisons des formules reliant $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ identiques aux formules (I.9), (I.10), (I.11), (I.12), (I.13) (I.14),

$$E_{1x}(x, y, -z) = E_{2x}(x, y, z), \tag{I.22}$$

$$E_{1y}(x, y, -z) = E_{2y}(x, y, z), \tag{I.23}$$

$$E_{1z}(x, y, -z) = -E_{2z}(x, y, z), \tag{I.24}$$

$$H_{1x}(x, y, -z) = -H_{2x}(x, y, z), \tag{I.25}$$

$$H_{1y}(x, y, -z) = -H_{2y}(x, y, z), \tag{I.26}$$

$$H_{1z}(x, y, -z) = H_{2z}(x, y, z). \tag{I.27}$$

Des formules (I.20), (I.25) et (I.26) nous déduisons

$$\mathbf{H}_{1T} = \mathbf{H}_{2T} = 0 \quad \text{dans } \Sigma. \tag{I.28}$$

Des formules (I.21) et (I.24),

$$E_{1n} = E_{2n} = 0 \quad \text{dans } \Sigma. \tag{I.29}$$

Nous trouvons pour la région Σ les conditions aux limites complémentaires de celle du conducteur parfait, on dit parfois impédance infinie, par opposition à impédance nulle qui schématise la condition à la limite du conducteur parfait. Des formules (I.28) et (I.29), donc à rapprocher de (I.1) et de (I.2), nous pouvons déduire

$$\frac{\partial E_{1T}}{\partial z} = \frac{\partial E_{2T}}{\partial z} = 0, \tag{I.30}$$

$$\frac{\partial H_{1n}}{\partial z} = \frac{\partial H_{1n}}{\partial z} = 0, \tag{I.31}$$

à rapprocher de (I.3) et (I.4).

En définitive, nous avons pour conditions aux limites du champ E_2, H_2

$$\mathbf{E}_{2T} = -\mathbf{E}_T \quad \text{sur } S, \tag{I.17}$$

$$\frac{\partial E_{2T}}{\partial z} = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \tag{I.30}$$

Principe de Babinet.

Comparons les conditions aux limites (I.15) et (I.4) pour le champ $\mathbf{E}_2'$, $\mathbf{H}_2'$ et les conditions (I.17) et (I.30) pour le champ $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$. Dans le premier cas, nous avons égalité des champs pour l'ouverture Σ et une condition aux limites type impédance nulle sur le conducteur S. Dans le second cas, nous avons égalité des champs sur le conducteur S et une condition aux limites type impédance infinie sur l'ouverture Σ. Si nous supposons maintenant que Σ est le conducteur et S l'ouverture et que de plus nous intervertissons champ électrique et champ magnétique avec les signes convenables, nous voyons que la solution précédente obtenue pour la première méthode est une solution du nouveau problème dans le cas de la deuxième méthode et inversement.

Par exemple, supposons résolu le problème dans le cas où l'écran est composé d'une surface conductrice S, Σ étant l'ouverture, en utilisant la deuxième méthode. C'est-à-dire nous sommes partis du champ de l'espace indéfini $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ et nous avons trouvé un champ de perturbation $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ tel que

$$\mathbf{E}_{2T} = -\mathbf{E}_T \quad \text{sur } S \text{ (conducteur)},$$

$$\frac{\partial E_{2T}}{\partial z} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \text{ (ouverture)}$$

et nous savons qu'alors la solution est, pour le demi-espace $z > 0$, $\mathbf{E} + \mathbf{E}_2$ et $\mathbf{H} + \mathbf{H}_2$.

Cela posé, supposons maintenant que Σ soit conducteur, S étant l'ouverture; prenons pour nouveau champ de l'espace indéfini $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ tel que $\mathbf{E} = -\mathbf{H}^0$.

Soit, d'autre part, un champ $\mathbf{E}_2^0$, $\mathbf{H}_2^0$ dans l'espace $z > 0$ défini par $\mathbf{H}_2^0 = \mathbf{E}_2$. Ce champ va satisfaire à

$$\mathbf{H}_{2T}^0 = \mathbf{H}_T^0 \quad \text{sur } S \text{ (ouverture)},$$

$$\frac{\partial H_{2T}^0}{\partial z} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \text{ (conducteur)}.$$

D'après (I.15), (I.4) le champ $\mathbf{E}_2^0$, $\mathbf{H}_2^0$ n'est autre que le champ de perturbation dans le cas de la première méthode, nous savons qu'alors la solution pour le demi-espace $z > 0$ est $\mathbf{E}_2^0$, $\mathbf{H}_2^0$.

En conclusion, si par l'une des méthodes nous avons résolu le problème de l'écran, il se trouve aussi résolu par l'autre pour l'écran complémentaire.

Remarque. — *a.* On peut se demander s'il n'est pas possible d'étendre ces résultats à un écran qui ne soit pas plan. Il n'en est rien, car la possibilité de séparer le champ de perturbation en deux champs égaux dans les deux demi-espaces séparés par l'écran tient essentiellement au fait que l'écran est plan. On peut alors parler d'image. Moullin [4] souligne dans un cas analogue, celui du réflecteur métallique excité par un courant rectiligne, le fait que le seul cas où la solution analytique est abor-

dable est celui où l'on peut parler d'image, c'est-à-dire où le réflecteur est constitué d'éléments de plans;

b. L'existence d'écran infiniment mince n'a pas de réalité physique, mais nous remarquons que la solution de l'écran infiniment mince peut s'adapter à l'écran de faible épaisseur, les champs tangentiels étant stationnaires pour $z = 0$.

CHAPITRE II.

Diffraction d'une ouverture unique dans un écran plan conducteur.

Le problème a déjà été très étudié par différents auteurs; on trouve en particulier dans la thèse de Vasseur un résumé complet des travaux effectués et un essai de résolution du problème général.

Comme dans tous les problèmes de propagation d'ondes, il existe deux méthodes pour aborder le problème. L'une utilise les fonctions propres et la séparation des variables, l'autre des sources auxiliaires et les fonctions de Green.

Méthode des fonctions propres.

Cette méthode ne s'applique que dans les cas où la surface des conditions aux limites est une quadrique. Pour le résumé des travaux déjà effectués et une bibliographie, nous reportons à la thèse de Vasseur, (p. 12 et suiv.). Rappelons que cette méthode a servi à résoudre le problème dans le cas du demi-plan indéfini [1], dans le cas de la fente indéfinie [6], et récemment dans le cas de l'ouverture circulaire [7].

Cette méthode demande des calculs longs et difficiles, mais permet d'aboutir à un résultat certain quand on peut l'appliquer. C'est en quelque sorte une méthode analytique, alors que la méthode plus directe consiste à disposer des sources auxiliaires et à vérifier les conditions du problème.

Signalons aussi la méthode de Sommerfeld, surtout utilisée en Acoustique [8] qui se rattache à la méthode des fonctions propres. On utilise une série de fonctions satisfaisant partiellement aux conditions aux limites et l'on cherche à ce que leur somme satisfasse globalement à ces conditions.

Méthode des sources auxiliaires.

Il existe deux manières générales d'envisager l'électromagnétisme. Soit comme Maxwell ne parler que de champ dans l'espace, envisager l'énergie comme répartie en tout point; on cherche alors à déterminer un champ dans l'espace qui satisfait aux équations de propagation et aux conditions aux limites comme l'indique le paragraphe précédent. Soit comme Lorentz estimer qu'il n'y a de réalité physique que dans les charges et courants électriques auxquels l'énergie est liée, chercher à les déterminer directement et calculer les champs par la théorie des potentiels retardés. On complète d'ailleurs ce point de vue en introduisant des charges et courants magnétiques qui se déduisent des charges et courants électriques classiques en échangeant vecteurs électriques et vecteurs magnétiques dans les équations de Maxwell.

Examinons les possibilités de traiter le problème de l'écran par cette dernière méthode, particulièrement le *problème de l'ouverture unique en incidence normale*.

Reportons-nous au paragraphe précédent; nous devons déterminer un champ de perturbation $\mathbf{E}'_2$, $\mathbf{H}'_2$ dans l'espace $z > 0$ qui satisfasse aux conditions

$$\mathbf{H}'_{2T} = \mathbf{H}_T \quad \text{sur } \Sigma,$$

$$\frac{\partial H'_{2T}}{\partial z} = 0 \quad \text{sur } S,$$

le champ incident étant le champ $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, Σ étant la surface de l'ouverture, S la surface de l'écran. Rappelons que le champ $\mathbf{E}'_2$, $\mathbf{H}'_2$ peut, après échange des vecteurs électriques et magnétiques affectés de signes convenables, représenter le champ de perturbation de l'espace $z > 0$ correspondant à l'écran métallique Σ. En introduisant alors des courants et des charges *électriques* sur l'écran Σ, on voit qu'on peut représenter les champs de perturbation dans les deux espaces $z > 0$ et $z < 0$. Ces champs liés par les relations (I.22) ,(I.27) sont représentés par le rayonnement des mêmes sources. Nous pouvons admettre que les deux faces de l'écran sont occupées par des sources identiques, qui rayonnent respectivement dans le demi-espace auquel elles font face. Physiquement, ces courants existent mais ne sont pas les seuls sur Σ, car le champ réel est constitué par les sommes $(\mathbf{E} + \mathbf{E}_1, \mathbf{H} + \mathbf{H}_1)$ pour $z < 0$ $(\mathbf{E} + \mathbf{E}_2, \mathbf{H} + \mathbf{H}_2)$ pour $z > 0$.

Si maintenant nous voulons déterminer directement le rayonnement d'une petite ouverture, nous voyons que nous sommes amenés à répartir sur cette dernière des courants et des charges déduits des courants et charges électriques en intervertissant $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$, c'est-à-dire des courants

et charges magnétiques. Nous remarquerons qu'alors les champs des deux espaces $z > 0$ et $z < 0$ ne se représentent plus par les mêmes sources, mais par des sources en opposition de phase. Ceci tient à la nature purement formelle des courants et charges magnétiques.

Les premiers, Larmor [9] et Tedone [10] ont pensé à représenter une onde dans une région limitée par une surface S en répartissant sur cette surface S des courants et charges électriques et magnétiques. Dans le cas d'une ouverture, leurs formules donnent un champ qui ne satisfait pas aux équations de Maxwell. Kottler [11] a montré qu'il fallait tenir compte non seulement de courants et de charges sur la surface S, mais aussi de courants et de charges linéaires sur son contour. Il a ainsi obtenu des champs qui, quelles que soient les sources, satisfont aux équations de Maxwell.

Calcul du champ à partir de courants et charges magnétiques.

Répartissons des charges et courants magnétiques, dont nous appelons σ et $\mathbf{j}$ les densités de surface

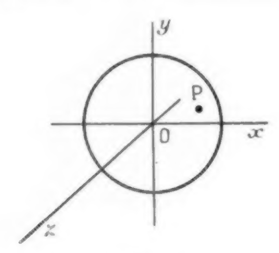


Fig. 1.

sur l'ouverture Σ, afin de représenter le champ de perturbation dans l'espace $z > 0$. La condition (I.4) du chapître précédent sur S se trouve de ce fait satisfaite par le champ rayonné. Il nous reste à trouver la répartition de ces courants et de ces charges pour satisfaire la condition (I.15)

$$(\text{I}.15) \qquad H_y = 0, \qquad H_x = H = \text{const}.$$

Rappelons que nous cherchons à résoudre le problème de la diffraction de l'onde incidente plane dont la direction de propagation est normale au plan de l'ouverture.

Remarquons tout d'abord qu'il n'est pas nécessaire de considérer isolément les charges et des courants magnétiques. Ces derniers étant donnés, les charges s'en déduisent par la relation

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = i\omega\sigma,$$

dite de conservation de l'électricité.

Nous savons d'autre part qu'il est possible de satisfaire aux équations de Maxwell en un point M

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0,$$
$$\mathbf{rot}\,\mathbf{H} + i\omega\varepsilon\,\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0$$

en prenant

$$(\text{II}.1) \qquad \mathbf{E} = i\omega\mu\,\mathbf{rot}\,\mathbf{\Pi},$$
$$(\text{II}.2) \qquad \mathbf{H} = \omega^2\varepsilon\mu\mathbf{\Pi} + \mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}.$$

En intervertissant E et H, on obtient des formules analogues; $\mathbf{\Pi}$ est appelé généralement l'antipotentiel vecteur de Hertz, ou vecteur de Hertz magnétique. La théorie des potentiels retardés conduit à le déduire des courants magnétiques par la formule

$$(\text{II}.3) \qquad \mathbf{\Pi} = \frac{1}{4\pi\mu}\int\frac{i}{\omega}\mathbf{j}\varphi\,ds.$$

$\mathbf{j}$, densité de surface de courant magnétique de l'élément ds entourant le point P.

$$\varphi = \frac{e^{ikr}}{r} \qquad \text{avec} \quad r = MP \ (\textit{fig. } 1).$$

Dans les formules (II.1) et (II.2), les dérivations portent sur les coordonnées du point M. Or celles-ci n'entrent dans la formule (II.3) que dans l'expression de φ, plus exactement dans r. Il est classique d'exprimer les formules en fonction des dérivés par rapport au point P, ces dernières se déduisent de celles par rapport à M par un simple changement de signe, ce qu'on peut exprimer symboliquement par $\frac{\partial}{\partial M} = -\frac{\partial}{\partial P}$; dans l'expression de $\mathbf{\Pi}$ (II.3) la dérivation ne porte pas sur $\mathbf{j}$, mais seulement sur φ; rappelons ce fait en mettant un indice φ aux opérateurs différentiels. Cet indice signifie donc que nous dérivons par rapport aux variables du point P et seulement sur φ.

Nous trouvons

$$(\text{II}.4) \qquad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{rot}_\varphi\int\mathbf{j}\varphi\,ds.$$

$$(\text{II}.5) \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\left(\omega\varepsilon\int\mathbf{j}\varphi\,ds - \frac{1}{\omega\mu}\mathbf{grad}_\varphi\operatorname{div}_\varphi\int\mathbf{j}\varphi\,ds\right).$$

Supposons d'abord *le point M extérieur à la surface Σ*. A partir de (II.4) et (II.5) nous retrouvons les formules de Kottler, dans lesquelles nous aurions supprimé les contributions de courants électriques éventuels disposés sur Σ. Le point M étant extérieur à Σ, la fonction sous le signe intégral est partout continue, ainsi que ses dérivées, nous pouvons intervertir les signes de dérivation et d'intégration. Le calcul classique [12] donne

$$(\text{II}.6) \qquad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi}\int\mathbf{j}\times\mathbf{grad}\,\varphi\,ds,$$

$$(\text{II}.7) \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int\left(i\omega\varepsilon\varphi\mathbf{j} - \frac{i}{\omega\mu}\operatorname{div}\mathbf{j}\,\mathbf{grad}\,\varphi\right)ds + \frac{1}{4\pi}\int_C\mathbf{grad}\,\varphi\,[(\mathbf{n}\times\mathbf{j})\,d\sigma].$$

Dans la formule (II.7) la dernière intégrale est une intégrale de contour, se rapportant au contour C de l'ouverture de surface $\Sigma . \mathbf{d}_s$ est l'élément linéaire de ce contour, $\mathbf{n}$ la normale à la surface Σ.

LE CHAMP RAYONNÉ AU LOIN DU COTÉ $z > 0$. — Physiquement, la région du champ facilement accessible à l'expérience est la région éloignée de l'ouverture, *les formules* (II.6) *et* (II.7) *relient en quelque sorte le champ dans l'ouverture et le champ au loin.*

Calculons par exemple le champ électrique à l'infini.

On trouve

$$\mathbf{E} = \frac{ik}{4\pi} \varphi_0 \mathbf{u} \times \int \mathbf{j} \, \Delta\varphi \, \mathrm{d}s, \qquad \text{(II.8)}$$

avec

$$\varphi_0 = \frac{e^{ikOM}}{OM}, \qquad \Delta\varphi = e^{ik\,\mathbf{OP}.\mathbf{u}},$$

$\mathbf{u}$ étant le vecteur unitaire de OM.

En particulier, le champ en un point éloigné de l'axe Oz est donné par

$$\mathbf{E}^0 = \frac{ik}{4\pi} \varphi_0 \mathbf{u} \times \int \mathbf{j} \, \mathrm{d}s.$$

Décomposons $\int \mathbf{j} \, \mathrm{d}s$ en ses deux composantes sur Ox et Oy.

$$J_x = \int j_x \, \mathrm{d}s,$$

$$J_y = \int j_y \, \mathrm{d}s;$$

on trouve ainsi

$$E_x^0 = -\frac{ik}{4\pi} \varphi_0 J_y,$$

$$E_y^0 = \frac{ik}{4\pi} \varphi_0 J_x.$$

Si $J_y = 0$, le champ transmis a la même polarisation que le champ incident.

Si $J_y \neq 0$, le champ transmis a une composante suivant Ox, dans le cas général cette composante n'est pas en phase avec la composante suivant Oy, le champ transmis est *polarisé elliptiquement*; si elle est en phase et différente de zéro, on assiste à une rotation simple de la polarisation incidente, le champ est polarisé linéairement.

Nous étudierons plus loin ces différents cas et remarquerons l'analogie qui existe entre ces cas et *l'optique cristalline classique.*

Supposons que $J_y = 0$. Ce cas se produit en particulier si *Oy est un axe de symétrie* pour l'ouverture. C'est évidemment le cas pour l'ouverture circulaire de centre O. On peut alors écrire pour un point éloigné de l'axe Oz

$$E_y^0 = \frac{ik}{4\pi} \varphi_0 J_x.$$

Supposons que, de plus, *l'ouverture soit petite devant la longueur d'onde*; dans ce cas l'expression du champ au loin peut s'écrire

$$\mathbf{E} = \frac{ik}{4\pi} \varphi_0 \mathbf{u} \times \mathbf{J}_x. \qquad \text{(II.8)}$$

Cette formule est la même que celle qui donne le champ électrique au loin d'un doublet magnétique dirigé suivant l'axe des x. On peut calculer le champ magnétique au loin par la formule (II.7) ou par la première équation de Maxwell, ce qui donne évidemment le même résultat, les champs calculés à partir des formules de Kottler satisfaisant aux équations de Maxwell [13]. On trouve ainsi un champ magnétique normal au plan formé de la direction de propagation et du vecteur électrique et dont le module se déduit de celui du vecteur électrique en le multipliant par le facteur $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$.

Calculons le flux d'énergie rayonnée dans l'espace $z > 0$ par un tel doublet on trouve

$$S' = -\frac{1}{16\pi} k \varepsilon \omega (J_x)^2.$$

Or l'énergie est rayonnée, S' doit être positif, donc J_x est imaginaire pur, mais j_x n'est autre en réalité que la composante suivant Oy du champ électrique dans l'ouverture. Comme cette dernière est de petites dimensions devant la longueur d'onde, la quadrature de J_x entraîne celle de j_x, donc de E_y.

D'ailleurs le flux dans l'ouverture est donné par

$$S = \frac{1}{2} Re\left(\int H_T E_y \, \mathrm{d}s \right),$$

$$S = \frac{1}{2} H_T Re\left(\int j_x \, \mathrm{d}s \right) = \frac{1}{2} H_T Re(J_x),$$

en égalant S et S' on démontre à nouveau que J_x est nécessairement imaginaire. Donc nous pouvons dire que dans *l'ouverture petite devant la longueur d'onde les champs électriques et magnétiques transverses sont en quadrature.*

Cet état est à rapprocher de celui du guide d'onde au-dessous de la fréquence de coupure.

Or, lorsque l'ouverture a des dimensions grandes devant la longueur d'onde, il est possible d'appliquer les formules de Kottler au champ incident pour calculer le champ au loin. Le champ existant alors dans l'ouverture est très voisin du champ incident.

En particulier, les champs électriques et magnétiques transverses sont en phase. Cet état est à rapprocher de celui du guide d'onde au-dessus de la fréquence de coupure.

En résumé, dans le cas de l'ouverture petite devant la longueur d'onde, on peut représenter le champ par un doublet magnétique dans le sens du champ incident. La valeur du champ au loin, donc le *diagramme* et le *facteur de transmission de l'ouverture*, sont fonctions de la seule valeur de $J_x = \int j_x \mathrm{d}s$.

On comprend ainsi que l'application par Stratton et Chu des formules de Kottler à une fente dans un écran métallique, les champs sources étant égaux aux champs incidents, donne un diagramme exact, mais avec un facteur de transmission inexact [14]. De même, bien que le calcul de Bethe relatif à l'ouverture circulaire de petite dimension devant la longueur d'onde [3], ait donné des champs inexacts dans l'ouverture, ainsi que l'a démontré Bouwkamp [7], Bethe a obtenu des champs au loin et un coefficient de transmission corrects, la valeur de J_x coïncidant par chance avec celle qu'on peut calculer à partir des j_x exacts dans l'ouverture.

La quadrature des champs dans l'ouverture explique assez bien que le facteur de transmission soit en $\left(\frac{\Sigma}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}$ et non en $\frac{\Sigma}{\lambda}$ comme dans l'application ordinaire des formules de Kottler au champ incident. En définitive, l'application des formules de Kottler, bien que très intéressante, *ne résoud pas le problème*, elle nous indique simplement que *si nous trouvons les champs dans l'ouverture nous saurons les calculer au loin.*

Il est, de plus, possible de relier la valeur du champ au loin dans l'axe au flux du vecteur de Poynting dans l'ouverture. En effet, soit W le flux complexe du vecteur de Poynting dans l'ouverture, la partie réelle représente le flux de l'énergie active; la partie imaginaire, le flux de l'énergie réactive, on trouve

$$W = \frac{1}{2} H_T \int j_x \,\mathrm{d}s.$$

Soit $e^0 = \frac{E_y^0}{\varphi_0}$, on a

$$W = -\frac{i}{\lambda} H_T e_y^0.$$

Calcul du champ dans l'ouverture. — Reportons-nous aux formules (II.4) et (II.5), ces formules vont nous permettre de calculer un champ dans l'ouverture. En écrivant que ce champ ainsi calculé satisfait aux conditions aux limites sur l'ouverture, nous obtenons un groupe d'équations intégrales qui résoud formellement le problème. Copson [15, 16] a été le premier à envisager cette méthode de résolution. Mais, comme Larmor et Tedone dans leurs formules pour les champs au loin, il n'a pas tenu compte de charges linéaires éventuelles sur les bords de l'écran. Vasseur [2] a complété ses formules par des intégrales de contour, de même que Kottler a complété les formules de Larmor et Tedone.

On ne peut utiliser directement les formules de Kottler pour le calcul des champs dans l'ouverture, car dans le calcul des champs au loin qui aboutit aux formules (II.7) et (II.8) analogues aux formules de Kottler, on intervertit l'ordre des dérivations et des intégrations. Or, on ne peut le faire sans précautions si la fonction sous le signe intégral n'est pas régulière, et elle ne l'est pas si M est dans Σ.

Calculons le champ magnétique au point M de l'ouverture Σ

$$\mathbf{H}(M) = \frac{i}{4\pi}\left(\omega\varepsilon \int \mathbf{j}\varphi \,\mathrm{d}s + \frac{1}{\omega\mu}\mathbf{grad}_\varphi \operatorname{div}_\varphi \int \mathbf{j}\varphi \,\mathrm{d}s\right).$$

Le calcul de $\operatorname{div}_\varphi \int \mathbf{j}\varphi \,\mathrm{d}s$ montre que cette quantité est donnée par l'égalité (II.4)

$$\operatorname{div}_\varphi \int \mathbf{j}\varphi \,\mathrm{d}s = -\int \varphi \operatorname{div}\mathbf{j} \,\mathrm{d}s + \oint \varphi(\mathbf{n}\times\mathbf{j})\,\mathbf{d\sigma};$$

la seconde intégrale étant une intégrale sur le contour de S, d'où la formule (II.9) qui n'est autre que la formule (II.7) légèrement modifiée

$$\text{(II.9)} \quad \mathbf{H}(M) = \frac{i}{4\pi}\Big[\omega\varepsilon \int \mathbf{j}\varphi \,\mathrm{d}s + \frac{1}{\omega\mu}\mathbf{grad}_\varphi \oint \varphi(\mathbf{n}\times\mathbf{j})\,\mathbf{d}\sigma - \frac{1}{\omega\mu}\mathbf{grad}_\varphi \int \varphi \operatorname{div}\mathbf{j}\,\mathrm{d}s\Big].$$

Cette formule peut se décomposer en trois parties. La première intégrale représente le champ dû à une densité superficielle de courants magnétiques, la deuxième intégrale le champ dû à une densité linéaire de courants magnétiques sur le contour de l'ouverture, la troisième le champ dû à une densité superficielle de charges magnétiques.

Dans l'ouverture, on a par définition

$$\mathbf{j} = \mathbf{n}\times\mathbf{E},$$

ce qui peut s'écrire

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}\times\mathbf{n}.$$

La seconde intégrale devient donc

$$I = -\operatorname{grad}_\varphi \oint \varphi(\mathbf{E}\,\mathbf{d\sigma}).$$

Or, qu'entendons-nous physiquement par écran infiniment mince et infiniment conducteur, sinon la limite d'un écran épais infiniment conducteur. Examinons de près les conditions aux limites à l'arête de l'écran. Soit un écran d'épaisseur ε dont le bord soit arrondi; par exemple l'enveloppe de sphères de diamètre ε dont les centres décrivent un contour C. Les conditions aux limites (*fig.* 2) sur un tel écran sont claires. Le champ électrique doit être partout normal à la surface du conducteur. En particulier, le champ situé dans xoy doit être normal à la tangente à C au point correspondant. De plus, le champ électrique ne saurait changer brutalement de direction dans un petit domaine ainsi qu'il le fait aux points A et A' opposés sur l'écran, sans passer par une grande valeur. C'est ce qu'on appelle classiquement en électrostatique le

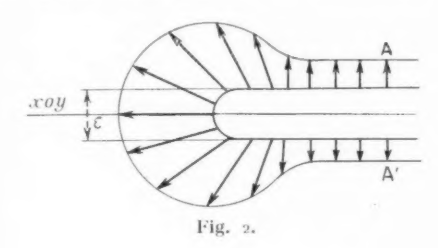


Fig. 2.

« pouvoir des pointes ». D'autre part, nous avons remarqué lorsque nous avons posé le problème, que les conditions aux limites pour l'écran infiniment mince et l'écran d'épaisseur finie sont peu différentes; si l'on préfère il n'y a pas de discontinuité physique entre le cas réel et le cas mathématique. L'expérience le démontre d'ailleurs. Nous avons fait des essais pour des longueurs d'onde de 8 et 23 cm avec des plaques métalliques d'épaisseur allant du 1/10ᵉ de millimètre à 2 mm sans constater de changements apparents dans la transmission. Donc, si nous faisons tendre ε vers zéro, nous obtiendrons sur C des champs électriques qui deviendront infinis, l'énergie correspondante restant finie et qui seront toujours normaux à la tangente à C au point correspondant. Meixner [17] a d'ailleurs précisé ce point de vue en démontrant de plus que le champ électrique devient infini comme l'inverse de la racine carrée de la distance à l'arête. Un examen précis de la solution classique de Sommerfeld relative à l'arête rectiligne montre, par exemple, la même irrégularité quand on s'approche de l'arête. Bouwkamp a résolu le problème de l'ouverture circulaire, en considérant l'écran comme la limite d'un hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'ouverture serait le cercle de gorge, il trouve aussi cette irrégularité et un champ normal à l'arête dans l'ouverture. Nous pouvons donc affirmer que *l'intégrale I est nulle pour le champ vrai, dans le cas où l'écran est infiniment conducteur.*

La formule (II.9) devient alors

$$\text{(II.9}'\text{)} \quad \mathbf{H}(M) = \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi}\left(\int \mathbf{j}\,\varphi\,ds - \frac{1}{k^2}\,\mathbf{grad}_\varphi \int \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}\,ds\right).$$

La même remarque peut se faire sur la formule de Kottler (II.7). L'intégrale de contour doit s'annuler si l'on remplace $\mathbf{j}$ par la valeur vraie dans l'ouverture. C'est seulement dans ce cas que les formules de Larmor et Tedone donnent un champ au loin satisfaisant aux équations de Maxwell.

Cas de l'ouverture circulaire petite devant la longueur d'onde.

Nous avons vu que pour avoir le champ au loin sur l'axe oz et le facteur de transmission de l'ouverture circulaire excitée par une onde plane dont la direction de propagation est Oz, il nous suffit de savoir calculer $J_x = \int j_x\,ds$. Il serait évidemment très intéressant de connaître en détail les champs dans l'ouverture, mais ces derniers sont peu accessibles à l'expérience, et, de plus, par la suite nous ne nous servirons que des résultats des champs au loin.

L'équation (II.9) se décompose en deux

$$\text{(II.10)} \quad \begin{cases} H_y = \dfrac{i\omega\varepsilon}{4\pi}\left(\displaystyle\int j_y\,\varphi\,ds - \frac{1}{k^2}\,\frac{d}{dy}\bigg|_\varphi \int \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}\,ds\right), \\[2ex] H_x = \dfrac{i\omega\varepsilon}{4\pi}\left(\displaystyle\int j_x\,\varphi\,ds - \frac{1}{k^2}\,\frac{d}{dx}\bigg|_\varphi \int \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}\,ds\right). \end{cases}$$

Soit d le diamètre de l'ouverture. Bethe [1] a remarqué dans sa formule donnant $\mathbf{H}_r$ dans l'ouverture analogue à la formule (II.9) que l'intégrale portant sur div $\mathbf{j}$ et représentant l'effet de charges magnétiques était de l'ordre $\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2$ par rapport à l'intégrale portant sur $\mathbf{j}$ et représentant l'effet des courants magnétiques. Ce qui lui a permis d'écrire pour $\frac{a}{\lambda}$ petit

$$\text{(II.11)} \qquad H_r = -\frac{i\omega\varepsilon}{4\pi k^2}\,\mathrm{grad}_\varphi \int \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}\,ds.$$

Il s'est ainsi ramené à un problème connu en électrostatique : comment répartir des charges sur un disque pour obtenir sur ce dernier un champ constant. On sait que la répartition des charges est donnée par la formule

$$\eta_1 = -\alpha\,\frac{x}{(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}},$$

α, coefficient constant; x et r, coordonnées d'un point P quelconque de $\boldsymbol{\Sigma}$.

Il lui restait à déterminer $\mathbf{j}$; pour cela il utilise la relation

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = i\omega\eta \tag{II.12}$$

et trouve que la répartition de courant

$$j_y^{(1)} = 0, \qquad j_x^{(1)} = +\, i\omega\alpha(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \tag{II.13}$$

satisfait à l'équation (II.12).

Or cette équation ne peut permettre de déterminer un vecteur, de façon unique, même dans deux dimensions. Il est facile de voir que ce n'est pas la seule solution de l'équation (II.12), il suffit d'ajouter à $\mathbf{j}^{(1)}$ un vecteur dérivant d'un rotationnel, pour satisfaire encore la relation (II.12). En particulier, la solution de Bethe ne satisfait pas à la condition aux limites sur le contour $(\mathbf{n} \times \mathbf{j})\, \mathrm{d}\sigma = 0$. Alors que la solution directe par la séparation des variables donne, comme l'a montré Bouwkamp, une répartition pour $\mathbf{j}$, y satisfaisant.

Les formules sont en effet

$$\left\{ \begin{aligned} j_x^{(2)} &= \, i\omega \frac{\alpha}{3} \frac{2a^2 - y^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \\ j_y^{(2)} &= -\, i\omega \frac{\alpha}{3} \frac{xy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}. \end{aligned} \right. \tag{II.14}$$

On vérifie que le courant de Bouwkamp $\mathbf{j}^{(2)}$ se déduit de celui de Bethe $\mathbf{j}^{(1)}$ en ajoutant un vecteur dérivant d'un rotationel

$$\mathbf{j}^{(2)} = \mathbf{j}^{(1)} + \mathbf{rot}\, \mathbf{A},$$

$\mathbf{A}$ étant un vecteur dirigé suivant oz et donné par la formule

$$A = -\, i\omega \frac{\alpha}{3} y \sqrt{a^2 - r^2}. \tag{II.15}$$

Comment se fait-il donc que le $J_x^{(1)} = \int j_x^{(1)}\, \mathrm{d}s$ calculé par Bethe se soit trouvé égal à celui que l'on calculera en partant des expressions de Bouwkamp ? On peut écrire

$$\int j_x^{(2)}\, \mathrm{d}s = \int j_x^{(1)}\, \mathrm{d}s + \int (\mathrm{rot}\, A)_x\, \mathrm{d}s,$$

$$J_x^{(2)} = J_x^{(1)} + \int \frac{\partial A}{\partial y}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x,$$

$$J_x^{(2)} = J_x^{(1)} + \int_C A\, \mathrm{d}\sigma,$$

le dernier terme est une intégrale le long du contour C de la surface $\boldsymbol{\Sigma}$. Étant donné la formule (II.15) cette dernière intégrale est nulle, donc

$$J_x^{(2)} = J_x^{(1)}.$$

De la même manière

$$J_y^{(1)} = \int J_y^{(1)}\, \mathrm{d}s$$

est nul dans la solution de Bethe, puisque $j_x^{(1)} = 0$ ainsi que dans celle de Bouwkamp, car

$$J_y^{(2)} = \int_C A\, \mathrm{d}x = 0.$$

Ceci confirme la remarque que nous avions faite précédemment, à savoir que le champ transmis à l'infini dans l'axe avait la même polarisation que le champ incident.

L'ouverture circulaire en général.

Dans le cas général de l'ouverture de diamètre comparable à la longueur d'onde, ou supérieur à la longueur d'onde, il n'est plus possible de faire l'approximation de Bethe dans l'équation (II.9'). Toutefois pour une ouverture assez grande devant la longueur d'onde, comme nous le préciserons plus loin, il est possible *de négliger dans la formule* (II.9') *l'intégrale exprimant la contribution des charges magnétiques devant celle qui provient des courants.* Nous ferons ainsi l'approximation *inverse* de celle de Bethe et nous pouvons écrire

$$H_T = \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \int j_x \varphi\, \mathrm{d}s, \tag{II.16}$$

la formule (II.16) nous donne alors une équation intégrale assez simple qui peut nous permettre de déterminer j_x.

Cette équation (II.16) est la même que celle à laquelle on aboutit dans le problème analogue en Acoustique, j_x est alors remplacé par un potentiel des vitesses ψ. De nombreux auteurs se sont intéressés au problème du rayonnement de l'ouverture circulaire dans un écran rigide en Accoustique. On peut trouver une bibliographie du sujet dans l'article de Levine et Schwinger [18]. Ces derniers ont trouvé une formule exprimant le coefficient de transmission et le potentiel des vitesses au loin en fonction du potentiel des vitesses dans l'ouverture et ayant la propriété intéressante d'être stationnaire par rapport aux expressions exactes du potentiel dans l'ouverture. Opérons de même à partir de la formule (II.16). Nous cherchons, en effet, à calculer

$$e^0 = \frac{ik}{4\pi} \int j_x\, \mathrm{d}s \tag{II.17}$$

à partir de la formule

$$H_T = \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \int j_x \varphi\, \mathrm{d}s. \tag{II.16}$$

Dans l'intégrale de la formule (II.16) j_x est fonction de P (x, y) et φ est fonction à la fois de P (x, y) et de M (x', y'). Multiplions les deux membres de l'égalité (II.16) par $j_x(M)$ courant magnétique existant en M (x', y') et intégrons les deux membres sur la surface Σ. On trouve

$$H_T \int j_x(M)\,ds' = \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \iint j_x(P)\,j_x(M)\,\varphi(MP)\,ds\,ds',$$

d'où, à l'aide de la formule (II.17),

$$(\text{II}.18) \qquad e_0 = H_T\omega\mu \frac{\int j_x(M)\,ds' \int j_x(P)\,ds}{\iint j_x(P)\,j_x(M)\,\varphi(MP)\,ds\,ds'}.$$

Cette expression est homogène en $j_x(P)$ $j_x(M)$ et symétrique en M et P. On démontre [18], [19] que la variation δe_0 de e_0 donnée par la formule (II.18) est nulle pour des variations δj_x, j_x étant donné par la formule (II.16).

Dans leur article, Levine et Schwinger calculent le coefficient de transmission, à l'aide d'une formule analogue à la formule (II.18). Ils utilisent pour le potentiel des vitesses dans l'ouverture ψ un développement de la forme

$$(\text{II}.19) \qquad \psi = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{n-\frac{1}{2}}$$

et obtiennent ainsi un coefficient de transmission relatif t de l'ouverture.

On peut penser à utiliser leurs résultats pour le problème qui nous intéresse. Néanmoins, on ne doit pas perdre de vue les différences essentielles qui existent entre le problème électromagnétique et le problème acoustique. En particulier est-il possible d'adopter pour j_x une expression de la forme (II.19) étant donné les conditions différentes sur le contour de l'ouverture pour ψ et pour j_x. On reconnaît pour premier terme du développement (II.19) l'expression donnée par Bethe pour le courant magnétique dans le cas d'une ouverture petite devant la longueur d'onde. Nous avons vu que cette expression ne correspond pas aux vraies valeurs trouvées par Bouwkamp. Sous ces réserves, nous pouvons adopter pour $\frac{d}{\lambda}$ assez grand le même facteur de transmission relatif que celui donné en Acoustique par Levine et Schwinger.

La mesure par l'expérience du champ rayonné au loin sur l'axe, lié au coefficient de transmission par la formule page 212 devrait pouvoir nous indiquer si cette assimilation est valable. Malheureusement cette mesure n'a pu être effectuée avec une précision suffisante pour conclure. Nous verrons plus loin que des mesures effectuées sur des écrans percés d'ouvertures circulaires égales et régulièrement espacées nous permettent de fixer la séparation des domaines de validité de l'approximation précédente et de l'approximation statique $\frac{d}{\lambda} = 0,43$. *Au-dessous de cette valeur on peut adopter le coefficient de transmission de Bethe, au-dessus de celui proposé en Acoustique par Levine et Schwinger.*

Sur la figure 3, nous avons porté en abscisse la valeur de $\frac{d}{\lambda}$, en ordonnée, le coefficient de transmission relatif de l'ouverture unique obtenu en

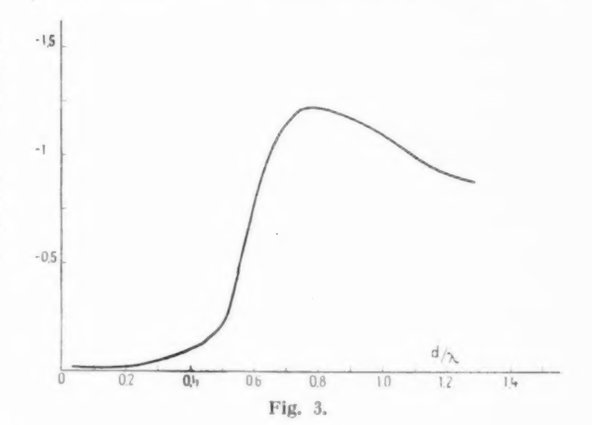


Fig. 3.

utilisant l'approximation de Bethe pour $\frac{d}{\lambda} < 0,43$, et en raccordant cette courbe avec celle de Levine et Schwinger pour l'Acoustique.

Physiquement, nous pouvons obtenir de nombreux renseignements qualitatifs sur l'ouverture circulaire dans un écran. Si le diamètre de cette dernière est grand devant la longueur d'onde, l'ouverture laisse passer comme en optique un faisceau d'onde qui est le prolongement direct de l'onde incidente. Mais au fur et à mesure de la réduction de d devant λ, les phénomènes de diffraction apparaissent; au lieu d'être concentrée en un faisceau de petite dimension angulaire, l'énergie rayonnée se disperse dans tout l'espace image. Finalement, si le diamètre d est petit devant la longueur d'onde, l'ouverture a un diagramme de rayonnement au loin analogue à celui d'un doublet magnétique (pour une onde incidente normale, bien entendu).

Rappelons que le champ au loin sur l'axe est donné par la formule

$$E_y^0 = \frac{ik}{4\pi}\varphi_0 \int E_y\,ds.$$

avec $\varphi_0 = \frac{e^{ikR}}{R}$, E_y champ électrique dans l'ouverture. Cette formule relie en amplitude et en phase le champ au loin dans l'axe au champ dans l'ouverture. Nous avons vu que lorsque d est petit devant λ le champ électrique E_y est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur H_T dans l'ouverture. Le champ magnétique tangentiel dans l'ouverture H_T n'est autre que celui de l'onde incidente. De plus, lorsque l'ouverture est grande devant la longueur d'onde (cas optique), les champs dans l'ouverture et au loin sont très voisins de champ de l'onde incidente. En résumé, lorsque d diminue d'une valeur grande devant λ à une valeur petite devant λ, la phase du champ transmis dans l'axe augmente de $\frac{\pi}{2}$, tandis que les dimensions angulaires du pinceau transmis augmentent jusqu'à ce que le diagramme de rayonnement devienne analogue à celui d'un doublet. Ce fait est à rapprocher de *l'avance de phase de π d'une onde sphérique passant par un foyer*. L'ouverture petite devant λ nous fait passer d'une onde plane à une onde sphérique, elle opère une « demi-focalisation » ayant pour conséquence une avance de phase de $\frac{\pi}{2}$.

L'ouverture possédant deux axes de symétrie rectangulaire.

Soit une ouverture (*fig.* 4) possédant deux axes de symétrie rectangulaire : Ox et Oy. Supposons que la polarisation, autrement dit le champ électrique de l'onde incidente, soit parallèle à Oy. L'expérience montre que l'onde transmise en un point éloigné de l'axe Oz possède la même polarisation que l'onde incidente.

On peut donc écrire

$$\int j_x \, ds = 0,$$

ou encore

$$\int E_x \, ds = 0.$$

Les conclusions seraient évidemment analogues si la polarisation de l'onde incidente était dirigée suivant Ox. Supposons maintenant que l'onde incidente, dont la direction de propagation est Oz, ait une polarisation quelconque. Elle peut se décomposer suivant deux ondes incidentes ayant leurs polarisations parallèles à Ox et Oy. Chacune de ces ondes donne dans l'espace-image une onde transmise avec des amplitudes relatives différentes et des phases différentes. En effet, les coefficients de transmission sont différents suivant que la polarisation est dirigée suivant Ox ou Oy. On observe donc en un point éloigné de l'axe des z une polarisation elliptique. C'est le résultat donné par l'expérience. Il n'est pas possible d'amener au zéro l'indication du champ reçu par un analyseur constitué par un guide terminé par un cornet. Ces faits sont à rapprocher de phénomènes observés sur les cristaux [20] comme nous le verrons plus loin.

Remarque. — On peut préciser de manière intuitive les relations de symétrie existant sur les champs dans l'ouverture. Tout d'abord, nous savons que le

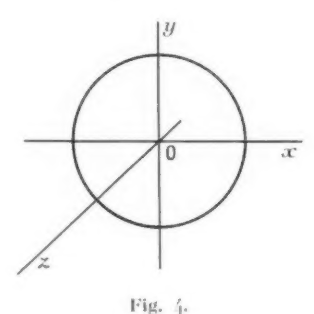


Fig. 4.

champ magnétique est égal au champ incident. Cherchons les relations de symétrie existant sur le champ électrique dans l'ouverture dans le cas d'une onde incidente plane dont la direction de propagation est Oz.

Effectuons une symétrie autour de Oz sur l'onde incidente, nous devons avoir les mêmes champs dans l'ouverture changés de signe. Nous devons, d'autre part, retrouver l'état initial en effectuant une symétrie autour de Oz de l'ouverture. Nous pouvons donc en déduire que les champs électriques en deux points symétriques par rapport à O se déduisent l'un de l'autre par une symétrie par rapport à O suivi de changement de signe. De même, si nous remplaçons l'onde incidente provenant des $z < 0$ par une onde provenant des $z > 0$ et si nous effectuons une symétrie de l'écran par rapport à Oy, nous voyons que les champs électriques de deux points symétriques par rapport à Oy se déduisent l'un de l'autre par la même symétrie. Donc E_y ne change pas de signe si x ou y se changent en $-x$ ou $-y$ et E_x change de signe si x se change en $-x$ ou y en $-y$.

CHAPITRE III.

Diffraction par un écran plan conducteur d'une onde plane en incidence normale.

Nous avons précisé au premier chapitre les conditions du problème pour un écran plan quelconque et une onde quelconque. Par la suite, l'onde incidente est l'onde plane de l'espace indéfini dont la direction

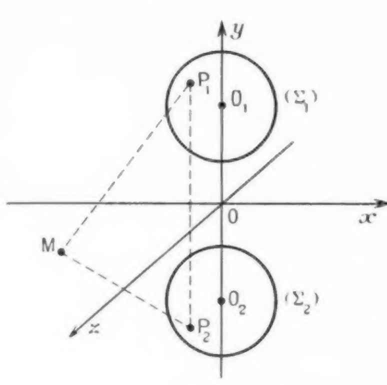


Fig. 5.

de propagation est normale à l'écran. Les écrans considérés sont constitués par des plans conducteurs parfaits, percés d'ouvertures égales possédant deux axes de symétrie rectangulaire parallèles à Ox et Oy et dont les centres forment les sommets d'un quadrillage régulier de côtés parallèles à Ox et Oy.

Avant de passer à ce cas général considérons un écran percé de deux ouvertures égales possédant des axes de symétrie parallèles à Ox et Oy et dont les centres O_1 et O_2 sont situé sur Oy et tels que O soit le milieu du segment O_1, O_2. Attaquons-les du côté $z < 0$ par une onde plane dont la direction de propagation est normale au plan de l'écran et dont la polarisation est dirigée suivant O_1, O_2. Supposons que les champs dans chacune des ouvertures soient *les mêmes que si elles étaient isolées.*

Nous avons vu qu'en un point P d'une telle ouverture Σ_1 isolée la composante sur Ox de la densité de courant magnétique ne change pas de signe si x ou y se changent en $-x$ ou $-y$ et la composante sur Oy change de signe pour un échange de x en $-x$ ou de y en $-y$.

Rappelons que le champ électrique en M dû à la diffraction de l'ouverture Σ_1 est donné par la formule

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_1} \mathbf{j} \times \mathbf{grad}\,\varphi\, ds.$$

La contribution d'une surface élémentaire entourant le point P_1 est proportionnelle à

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{grad}\,\varphi_1.$$

Soit M un point du plan xOz, plan médiateur du segment O_1O_2.

Soient (j_x, j_y) les composantes de $\mathbf{j}_1$ en P_1.

Soient (X, Y, Z) les composantes de $\mathbf{grad}\,\varphi_1$ pour les points M et P_1; les composantes de $\mathbf{e}_1$ sont

$$\mathbf{e}_1 \begin{cases} j_y Z, \\ -j_x Z, \\ j_x Y - j_y X. \end{cases}$$

Soit P_2 le point de l'ouverture Σ_2 symétrique de P_1 par rapport à xOz, les composantes de $\mathbf{j}_2$ en P_1 sont $(j_x - j_y)$ les composantes de $\mathbf{grad}\,\varphi_2$ sont $(X - Y, Z)$, d'où les composantes de $\mathbf{e}_2$

$$\mathbf{e}_2 \begin{cases} -j_y Z, \\ -j_x Z, \\ -j_x Y + j_y X. \end{cases}$$

En additionnant les composantes de $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$, on voit que la contribution totale de P_1 et P_2 nous

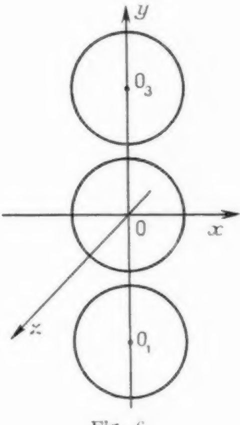


Fig. 6.

donne un vecteur parallèle à Oy. Donc le champ électrique rayonné par les ouvertures Σ_1 et Σ_2 en un point du plan xOz est normal à ce plan. On voit facilement que $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ est nul en tout point du plan.

Ces conditions montrent qu'on peut remplacer

le plan xOz par un conducteur parfait sans changer le champ rayonné dans l'espace $z > 0$. Remarquons qu'il en est de même pour l'espace $z < 0$, la métallisation du plan xOz ne peut modifier le champ incident, ni le champ diffracté par réflexion comme on le vérifie sur les égalités de symétrie qui lient le champ diffracté par transmission dans l'espace $z > 0$ à celui diffracté par réflexion dans l'espace $z < 0$.

Physiquement ces résultats sont naturels, c'est en quelque sorte le théorème des images électriques. Σ_2 est l'image de Σ_1 à travers le plan xoz.

Considérons maintenant les deux ouvertures circulaires, mais excitées cette fois par une onde incidente dont la polarisation est normale à la direction O_1 et O_2. On peut démontrer de même que le champ électrique rayonné en un point M du plan xOz est toujours contenu dans ce plan et, de plus, que $\frac{d\mathbf{E}_{xOz}}{dy} = 0$. Nous retrouvons les conditions aux limites de ce que nous avons appelé plan d'impédance infinie par opposition au conducteur parfait appelé plan d'impédance nulle. De la même manière, considérons un nombre impair d'ouvertures, par exemple trois (*fig.* 6) dont les centres O_1, O, O_3 sont alignés.

Nous pouvons démontrer que le plan de symétrie xOz passant par le centre O de l'ouverture centrale est, soit un plan d'impédance nulle, soit un plan d'impédance infinie, suivant que la polarisation de l'onde incidente est normale ou parallèle à ce plan.

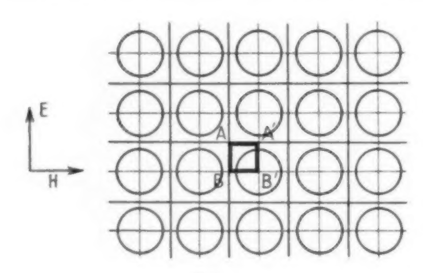


Fig. 7.

Ces résultats peuvent se généraliser dans le cas où l'on a une infinité d'ouvertures égales dont les centres occupent les sommets d'un quadrillage rectangulaire régulier. On peut toujours, à *condition de négliger l'interaction entre les ouvertures*, démontrer que le champ électrique rayonné dans l'espace $z > 0$ en des points de plans de symétrie du quadrillage normaux à la polarisation de l'onde incidente, est normal à ces plans et stationnaire pour un déplacement petit. On peut donc métalliser ces plans. De la même manière, on peut remplacer les plans de symétrie parallèles au vecteur électrique de l'onde incidente par des plans d'impédance infinie (*fig.* 7).

Cette façon de voir a pour intérêt de *nous ramener à un problème d'ondes guidées.*

Il nous suffit, en effet, de résoudre le problème de l'obstacle constitué par une ouverture dans le guide particulier formé de deux parois à impédance nulles AA', BB' et deux parois à impédance infinies AB, $A'B'$. Le problème est simplifié dans une certaine mesure par rapport à celui de l'ouverture unique, l'énergie ne pouvant se propager que suivant un nombre restreint de modes. Le champ total se déduira du champ de ce guide par de simples translations $\overrightarrow{AA'}$ ou $\overrightarrow{AB}$, accompagnées de symétries.

Étude du guide AA', BB'.

Supposons que le guide AA' BB' a une section rectangulaire et que les parois AA' et BB' sont

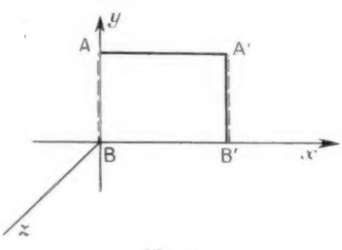


Fig. 8.

d'impédance nulle, tandis que les parois AB et $A'B'$ sont d'impédance infinie (*fig.* 8).

Soient des axes de coordonnée Bx et By. Une modification légère des ondes guidées classiques du guide rectangulaire à parois métalliques permet de trouver celles du guide considéré. Soit

$$AB = A'B' = b,$$
$$AA = BB' = a.$$

Il nous suffit, en effet, de prendre pour vecteur de Hertz longitudinal [13] des expressions de la forme sinus × cosinus au lieu de prendre sinus × sinus ou cosinus × cosinus. On trouve ainsi.

Modes électriques :

$$\text{I.}\quad \left|\begin{aligned} E_x &= \quad ik_z \frac{n_1 \pi}{a} \quad \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y, \\ E_y &= -ik_z \frac{n_2 \pi}{b} \quad \cos \frac{n_1 \pi}{a} x \cos \frac{n_2 \pi}{b} y, \\ E_z &= \alpha^2 \cos \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y, \\ H_z &= 0, \\ \mathbf{H}_T &= -\frac{\omega \xi}{k_z} \mathbf{u} \times \mathbf{E}_T. \end{aligned}\right.$$

$\mathbf{u}$, vecteur unitaire de la direction Bz.

Modes magnétiques :

$$
\text{II.}\quad
\begin{cases}
H_x = ik_z \dfrac{n_1\pi}{a} \cos \dfrac{n_1\pi}{a} x \cos \dfrac{n_2\pi}{b} y, \\[2mm]
H_y = - ik_z \dfrac{n_2\pi}{b} \sin \dfrac{n_1\pi}{a} x \sin \dfrac{n_2\pi}{b} y, \\[2mm]
H_z = - \chi^2 \sin \dfrac{n_1\pi}{a} x \cos \dfrac{n_2\pi}{b} y, \\[2mm]
E_z = 0, \\[2mm]
\mathbf{E}_T = \dfrac{\omega\varepsilon}{k_z} \mathbf{u} \times \mathbf{H}_T,
\end{cases}
$$

avec

$$
\chi^2 = k^2 - k_z^2 = \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right) \pi^2.
$$

On vérifie que les champs décrits par ces formules satisfont aux conditions aux limites. En divisant les formules des modes électriques, par exemple, par n_2 et en faisant tendre n_1 et n_2 vers zéro, on voit qu'on retrouve l'onde plane indéfinie, qui n'est autre que le mode (0, 0) de ce guide. Le résultat est physiquement évident, l'onde plane indéfinie satisfaisant aux conditions aux limites.

Appelons $\mathcal{E}_{n_1 n_2}$ et $\mathcal{H}_{n_1 n_2}$ les modes électriques et magnétiques correspondant aux nombres n_1 et n_2. On voit que les modes $\mathcal{E}_{n_1,0}$ et $\mathcal{H}_{0,n_2}$ n'ont pas de signification physique. Ce guide possède un mode principal et ses modes fondamentaux sont $\mathcal{E}_{01}$ et $\mathcal{H}_{10}$.

Les formules des champs sont pour $\mathcal{H}_{10}$.

$$
\text{(III.1)}\quad
\begin{cases}
H_x = ik_z \dfrac{\pi}{a} \cos \dfrac{\pi x}{a}, & E_x = 0, \\[2mm]
H_y = 0 & E_y = - i\omega\varepsilon \dfrac{\pi}{a} \cos \dfrac{\pi x}{a}, \\[2mm]
H_z = - \dfrac{\pi^2}{a^2} \sin \dfrac{\pi x}{a}; & E_z = 0,
\end{cases}
$$

avec

$$
k_z^2 = k^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{4a^2} \right)
$$

de même pour $\mathcal{E}_{01}$

$$
\text{(III.2)}\quad
\begin{cases}
E_x = 0, & H_y = 0, \\[2mm]
E_y = ik_z \dfrac{\pi}{b} \cos \dfrac{\pi y}{b}, & H_x = i\omega\varepsilon \dfrac{\pi}{a} \cos \dfrac{\pi y}{b}, \\[2mm]
E_z = \dfrac{\pi^2}{a^2} \sin \dfrac{\pi y}{b}; & H_z = 0.
\end{cases}
$$

Étude de l'écran dans le guide.

En définitive il nous faut étudier le problème de la transmission et de la réflexion d'une onde sur l'obstacle constitué par une plaque métallique obturant normalement le guide.

Supposons que les dimensions des côtés a et b soient inférieures à $\frac{\lambda}{2}$. — Le seul mode qui peut se propager dans le guide est le mode principal, les modes supérieurs sont évanescents. Soit une onde principale se propageant dans le sens des $z > 0$, supposons de plus que les extrémités du guide ne réfléchissent pas les ondes qui pourraient y arriver. L'existence de l'obstacle fait naître un régime d'onde qui peut s'exprimer à l'aide des différents modes du guide. Les modes de numéro les plus bas qui sont excités sont les modes $\mathcal{H}_{10}$ et $\mathcal{E}_{01}$. Dans le cas considéré de a et b inférieurs à $\frac{\lambda}{2}$, ces modes sont évanescents, donc rapidement atténués le long de Oz. A une certaine distance de l'obstacle, le seul mode existant est le mode principal, c'est-à-dire l'onde plane classique. Si nous considérons l'écran dans son ensemble, nous voyons que nous retrouvons une surface d'onde plane dans l'espace-image à une distance assez faible de l'écran. En résumé, si les dimensions a et b sont inférieures à λ, on est ramené au problème de l'obstacle dans un guide d'onde, ce dernier étant terminé par des impédances caractéristiques et parcouru *par un seul type d'onde*. J. Ortusi [21] a établi à partir du théorème de conservation de l'énergie et du théorème de réciprocité la forme générale des coefficients de réflexion et de transmission d'une onde dans un guide vis-à-vis d'un obstacle sans pertes. Nous reprendrons ses notations.

Soit 1 l'onde incidente t l'onde transmise, r l'onde réfléchie, on peut écrire (¹)

$$
t = i \sin u \, e^{i\varphi},
$$
$$
r = \cos u \, e^{i\varphi}.
$$

Dans le cas d'un obstacle d'épaisseur petite devant la longueur d'onde par exemple une plaque mince percée d'un trou, l'égalité des champs rayonnés de part et d'autre de l'obstacle amène à la relation

$$
t = 1 + r,
$$

d'où l'on tire

$$
\varphi = \pi + u;
$$

en définitive.

$$
\text{(III.3)}\qquad t = - i \sin u \, e^{iu},
$$
$$
\text{(III.4)}\qquad r = - \cos u \, e^{iu}.
$$

Nous appellerons u l'angle de l'obstacle. Il est facile de voir que les notions précédentes sont analogues à celles d'impédance sur une ligne de transmission. La relation $t = 1 + r$ caractérise l'impédance en dérivation, la relation complémentaire $t = 1 - r$ caractérisant l'impédance en série.

(¹) Dans cette partie, nous avons conservé comme facteur temps le facteur exp $(+ j\omega t)$ au lieu du exp $(- j\omega t)$ de la section précédente.

L'obstacle mince sans perte dans une ligne de transmission peut être assimilé à une self ou une capacité suivant que le signe de u est respectivement négatif ou positif. Certains auteurs ont déjà pensé [22], [23] à rapprocher les phénomènes existant dans des milieux constitués d'écrans minces de ceux de lignes de transmission chargées d'impédances.

Nous sommes partis d'ouvertures toutes égales, disposées suivant les sommets d'un quadrillage rectangulaire. Ceci a permis de démontrer que dans le cas où les côtés du quadrillage étaient inférieurs à λ une onde plane tombant normalement sur un tel écran étant transmise et réfléchie suivant une onde plane. Ce résultat peut se généraliser dans le cas où les ouvertures ne sont plus disposées suivant un quadrillage, mais où les distances de leurs centres sont néanmoins inférieures à λ. De plus, en appliquant le théorème de Babinet, les résultats d'un écran constitué d'un plan conducteur percé d'ouvertures peuvent s'étendre au cas de l'écran complémentaire constitué de disques.

Le calcul direct de la diffraction d'une ouverture dans le guide considéré plus haut peut s'effectuer dans un cas simple, celui où l'écran est constitué par des bandes de plans [24]. Dans le cas général, et même dans le cas de l'ouverture circulaire, le calcul extrêmement compliqué est pratiquement insoluble et de peu d'intérêt, étant donné la possibilité de mesures expérimentales précises.

Mesure du coefficient de transmission d'une plaque.

Posons-nous le problème de la mesure du coefficient de transmission d'une plaque métallique, percée d'ouvertures circulaires dont les centres sont les sommets d'un quadrillage de côtés égaux et inférieurs à λ.

Soit, par exemple, une plaque métallique de 2 mm d'épaisseur percée de trous circulaires égaux de diamètre égal à 35 mm et dont les distances des centres soient de 65 mm. Cherchons à connaître son coefficient de transmission pour une onde polarisée de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 8{,}20$.

Mesure directe. — On peut essayer de faire tomber une onde plane sur un tel écran et mesurer directement l'onde transmise. Il ne faut pas oublier que l'onde plane n'a pas de réalité physique et est une simplification destinée au calcul.

On peut assimiler dans une certaine mesure une onde sphérique à une onde plane. C'est ce que nous ferons en faisant tomber sur un écran carré de 65 cm de côté l'onde issue d'un cornet de surface d'ouverture 25×25 cm et de profondeur 35 cm. A 2,50 m de distance l'onde qui tombe sur le carré de 65×65 est sensiblement plane, car elle semble provenir du sommet du cornet. On utilise comme récepteur un cornet identique (*fig.* 9).

La mesure est très simple, on note le champ reçu en B provenant de A en l'absence et en présence de l'écran E; le rapport de ces champs nous fournit directement le coefficient de transmission. Cette mesure n'a de mérite que sa simplicité. En effet, tout d'abord elle suppose qu'il n'existe pas de régime stationnaire entre les cornets et l'écran. Or en déplaçant l'un des cornets, l'indication du champ reçu varie avec une périodicité rapprochée, ce qui prouve l'existence « d'ondes stationnaires » en quelque sorte. On peut penser à éloigner encore les deux cornets par rapport à l'écran, de façon à « découpler » source et récepteur de l'écran. Mais alors, l'écran n'interceptera plus la majorité de

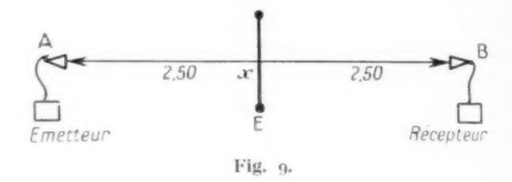


Fig. 9.

l'énergie émise. Si l'on agrandit l'écran, on fait naturellement renaître la difficulté précédente.

D'autre part, l'effet de bord est important, une partie de l'énergie qui n'est pas interceptée par l'écran est captée par le récepteur et vient fausser les indications. On peut penser à disposer un grand écran métallique qui complète l'écran E; mais, on constate expérimentalement que la diffraction de l'ouverture de 65×65 cm, ainsi constituée vient alors fausser la mesure et qu'il est encore préférable d'opérer sans cet écran supplémentaire.

Mesure de la phase de l'onde transmise.

On pourrait penser à mesurer la phase de l'onde transmise par un dispositif interférométrique analogue à celui qui est décrit dans le chapitre V; ici, encore, on se heurte à deux difficultés. Comme précédemment, le champ reçu n'est pas celui qu'on cherche à mesurer. D'autre part, il faut comparer la phase de deux ondes d'amplitude très différentes. Or, ce problème est délicat; car, en général, une atténuation s'accompagne d'une importante variation de phase qui fausse la mesure.

Par effet de filtre. — Nous savons qu'en disposant deux obstacles égaux sur une ligne de

transmission, nous pouvons constituer un résonateur. En disposant deux écrans égaux et parallèles, nous pouvons le faire également. Soient deux obstacles sur une ligne de transmission $(t_1 r_1)$, $(t_2 r_2)$ séparés par une distance x (*fig.* 10). On peut écrire le coefficient de transmission T de l'ensemble

$$T = q \frac{t_1 t_2}{1 - q^2 r_1 r_2}, \qquad \text{avec} \quad \theta = \frac{2\pi x}{\lambda}, \qquad q = e^{-i\theta}$$

d'où pour deux obstacles égaux :

$$T = e^{-i\theta} \frac{-\sin^2 u \, e^{iu}}{1 - \cos^2 u \, e^{2i(u-\theta)}}.$$

Le maximum égal à 1 du module de T s'obtient pour

$$\theta = K'\pi + u \qquad (K' = 1, 2, \ldots).$$

Dans notre cas particulier, on a toujours $u < 0$ (obstacle équivalent à une self) et les différentes résonances s'obtiendront pour

$$\text{(III.3)} \qquad \frac{2\pi x}{\lambda} = \theta = K'\pi - |u|,$$

$|u|$ pouvant varier de 0 à $\frac{\pi}{2}$ posons $|u| = \frac{\pi}{2} - \alpha$, on a

$$\text{(III.3')} \qquad \frac{2\pi x}{\lambda} = \theta = \frac{\pi}{2} + \alpha + K\pi \qquad (K = 0, 1, 2, \ldots),$$

α ou u caractérisent complétement l'obstacle.

Les formules (III.1) et (III.2) deviennent

$$\text{(III.1')} \qquad t = \cos\alpha \, e^{i\alpha},$$

$$\text{(III.2')} \qquad r = i \sin\alpha \, e^{i\alpha}.$$

L'écran du problème caractérisé entièrement par une valeur de α comprise entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, la mesure de l'avance de phase de l'onde transmise n'est autre que α.

Nous allons chercher à mesurer, soit la surtension du résonateur, soit la distance des obstacles à la résonance. On peut opérer, soit à fréquence fixe en faisant varier la distance entre plaques, soit en laissant la distance fixe et en faisant varier la fréquence. Or, en faisant varier la fréquence on ne peut être sûr que seul le résonateur agit sur l'indication de champ reçu. En effet, le régime d'onde stationnaire entre les cornets varie, ainsi que le niveau de la source et les indications pour une même énergie incidente de récepteur. On peut, dans une large mesure, corriger ces deux derniers défauts en utilisant des mesureurs de champ non accordé, c'est-à-dire à faible surtension. Néanmoins, il est plus sûr d'opérer à fréquence fixe, l'autre méthode servant éventuellement de vérification.

Nous disposerons donc comme précédemment (*fig.* 9) les deux cornets d'émission et de réception. L'écran E de la figure est constitué de deux plaques identiques parallèles, normales à AB, dont on peut faire varier l'écartement x. La mesure de la surtension peut s'effectuer en notant les différences d'écartements se produisant de part et d'autre de la position du maximum de transmission pour une transmission égale en puissance à la moitié de la transmission maximum. Ici s'introduit une cause d'erreur importante. Si l'on substitue au résonateur une plaque métallique pleine, on voit que le champ reçu n'est pas nul comme il se devrait, on reçoit par diffraction des bords sensiblement le tiers en champ de la transmission en l'absence d'écran. On comprend que cela suffise à fausser toutes les indications de mesures directes des champs.

En définitive, *la seule méthode correcte et qui nous donne des résultats cohérents est la mesure de l'écartement des plaques pour un maximum de transmission*,

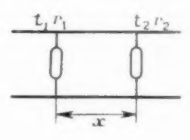


Fig. 10.

l'influence des champs parasites est alors éliminée. Notons que l'écartement des obstacles est celui des plans de symétrie, comme pour des obstacles de faible épaisseur dans un guide.

On trouve ainsi pour la plaque percée d'ouvertures circulaires de 35 mm dont les centres sont écartés de 65 mm un écart des plans de symétrie donnant, grâce à la formule (III.3), une valeur de $|u|$

$$|u| = 0{,}27 \text{ rad}.$$

Vérifications. — 1. En disposant quatre plaques identiques aux précédentes et telles que leurs plans de symétrie soient éloignés de la même distance, on peut constituer un véritable filtre présentant trois maxima de transmission en fonction de la fréquence. L'écart en fréquence de ces maxima peut, dans la mesure où l'obstacle lui-même n'est pas sensible en fréquence, nous donner la valeur de u. On retrouve après expérience, une valeur très voisine de la précédente. Cette expérience constitue une vérification de la méthode choisie. C'est d'ailleurs elle, dans les mesures précédentes, qui nous a imposé le plan de symétrie d'une plaque pour abscisse zéro.

2. En écartant deux plaques tout en les maintenant parallèles, on doit trouver des maxima de

transmission correspondant à des écartements régulièrement échelonnés de $\frac{\lambda}{2}$. C'est ce qu'on retrouve exactement aux erreurs d'expériences près.

Remarque. — 1. Les ouvertures ont été placées dans ces mesures en regard les unes des autres. On voit par l'expérience, qu'en ne les mettant plus en face les unes des autres, par exemple en quinconce, on diminue le coefficient de transmission légèrement.

2. Quelques mesures ont été effectuées avec des ondes de $\lambda = 3$ cm sur des plaques homothétiques des précédentes. On a trouvé évidemment, des

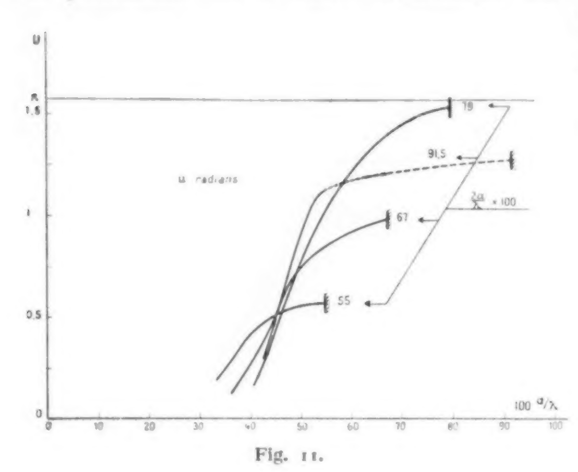


Fig. 11.

résultats identiques, à celà près qu'aux fréquences plus élevées, la résistivité non nulle du métal commence à se faire sentir.

Résultats des mesures du coefficient de transmission d'une plaque.

Les courbes de la figure 11 représentent les résultats des mesures effectuées. Nous portons en ordonnée, la valeur de $|u|$ et en abscisse, la valeur de $\frac{d}{\lambda} = \xi$; les différentes courbes obtenues sont fonction de l'écartement $2a$ des centres des ouvertures Soit $\zeta = \frac{2a}{\lambda}$. (*fig.* 12).

On aurait pu penser calculer un coefficient de transmission τ à partir de notion d'optique géométrique $\tau = \sqrt{\frac{\Sigma}{S+\Sigma}}$. Nous appellerons coefficient de transmission relatif T' le rapport du coefficient de transmission $T = \sin|u|$ au coefficient τ.

Dans le cas posé d'ouvertures circulaires disposées suivant un quadrillage

$$T' = \frac{2a}{d}\sqrt{\frac{4}{\pi}}\sin|u|,$$

T' est donné en fonction de $\xi = \frac{d}{\lambda}$ par la figure 13 (²).

Analogie pour une ouverture au phénomène de la coupure pour un guide d'onde. — L'examen de ces courbes nous amène à des conclusions très intéressantes. Si ξ est voisin de 0,43, T' est sensiblement le même quel que soit l'écartement des ouvertures. Si $\xi < 0{,}43$, les écrans sont ***beaucoup moins transparents*** aux ondes qu'une analogie optique nous l'aurait fait supposer. De plus, pour une même valeur de ξ, T' diminue si ζ augmente.

Si $\xi > 0{,}43$, inversement, on trouve des écrans ***plus perméables*** que l'analogie optique ne le ferait

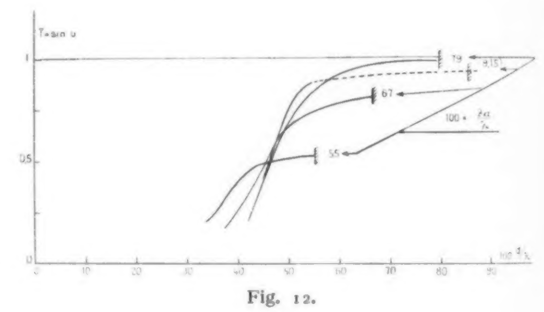


Fig. 12.

supposer et pour une même valeur de ξ, T' augmente si α augmente.

On peut remarquer également que pour $\xi < 0{,}43$, la « surface d'antenne » d'une ouverture est plus petite que sa surface géométrique, et inversement plus grande pour $\xi > 0{,}43$.

Le comportement de l'écran change donc radicalement suivant que ξ est inférieur ou supérieur à la valeur 0,43 *et cela à peu près indépendament de l'écartement des ouvertures*. Il est intéressant physiquement de rapprocher ce phénomène de celui de la *coupure dans un guide d'onde*. Au-dessous d'une certaine valeur du diamètre, le problème de l'ouverture peut se traiter en « statique ». Le champ électrique est presque en quadrature avec le champ magnétique, le coefficient de transmission est très inférieur, à celui qu'on calculerait en faisant une analogie

(²) Les coefficients de transmission représentent des rapports de champs; pour avoir des rapports en puissance, il faudrait élever au carré ces derniers.

optique. De même, dans un guide au-dessous du diamètre de coupure, les champs électriques et magnétiques sont en quadrature, la transmission est nulle (pour un guide indéfini). Nous observons les phénomènes inverses au-dessus du diamètre considéré. Remarquons, de plus, que pour un guide d'onde circulaire, la fréquence de coupure est obtenue pour $\frac{d}{\lambda} = 0{,}58$, donc supérieure à la valeur 0,43 considérée plus haut pour l'écran.

cable que si $a < \frac{\lambda}{2}$, comme nous le verrons. Néanmoins, nous pouvons étendre au cas de l'ouverture unique, la notion de « pseudo coupure ». En admettant l'indépendance du phénomène par rapport à l'écartement des centres. Si $\xi < 0{,}43$, on peut traiter le problème de l'ouverture grâce à la méthode statique de Bethe qui permet une bonne représentation du phénomène. Si $\xi > 0{,}43$, le phénomène change d'aspect, on peut adopter l'approximation que nous

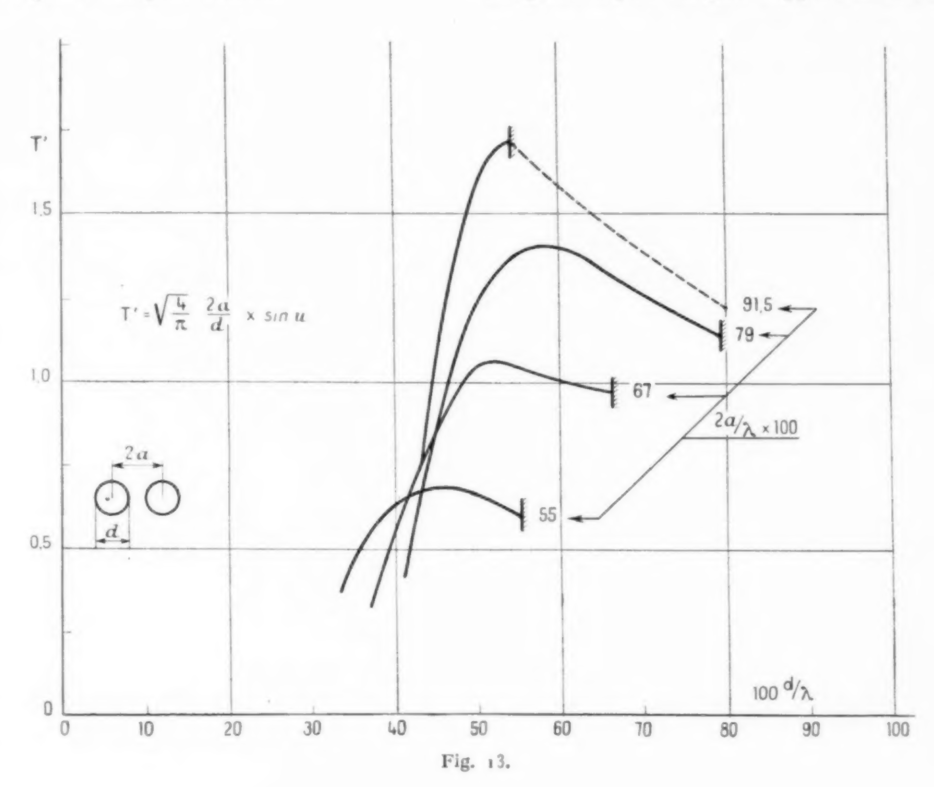


Fig. 13.

Nous sommes maintenant en mesure de préciser dans quelles limites sont valables les approximations faites précédemment pour le calcul du rayonnement d'une ouverture circulaire. En effet, si les ouvertures s'éloignent les unes des autres, le problème précédent se ramène à celui d'une ouverture unique. On obtient en particulier le coefficient de transmission relatif d'une ouverture unique en fonction de $\frac{d}{\lambda}$, en faisant tendre ξ vers l'infini dans l'expression $\frac{T'}{\xi}$.

La méthode de mesure qui nous a permis d'obtenir T' pour une plaque percée de trous n'est appli-

avons proposée précédemment. Les résultats expérimentaux ne permettent pas ainsi de conclure de manière certaine sur la validité de l'approximation précédente, mais, ils ne l'infirment pas; par exemple, on constate lorsque a croît, le déplacement vers les ξ positifs du maximum d'une courbe T'. Mais, il n'est pas possible d'en conclure que la limite pour a infini est $\xi = 0{,}76$ (résultat de Levine et Schwinger).

L'existence d'une longueur d'onde de « pseudo coupure », au-dessous de laquelle une ouverture peut se traiter statiquement peut évidemment s'étendre au cas d'une ouverture de forme quelconque. On peut même proposer comme règle approchée que cette

longueur d'onde soit voisine de la longueur d'onde de coupure du guide correspondant ayant le contour de l'ouverture pour section droite. Les conclusions précédentes relatives aux écrans peuvent s'étendre au cas d'ouvertures quelconques régulièrement disposées.

Remarque. — Il est intéressant de comparer la diffraction de l'embouchure d'un guide avec la diffraction d'une ouverture lorsqu'on se rapproche de la longueur d'onde de coupure. Soit un guide d'onde cylindrique de diamètre 56 mm, débouchant au centre d'un écran de 1 m × 1 m. L'ouverture de ce guide rayonne une onde sphérique dans l'espace libre. Si nous faisons varier la longueur d'onde de l'onde émise par la source de 6,8 à 9,3 cm par exemple, le guide sera parcouru par l'onde H_{01},

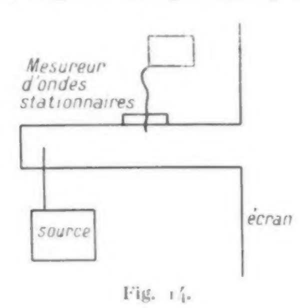


Fig. 14.

fondamentale du guide cylindrique. Le passage de cette onde H_{01} à l'onde sphérique s'accompagne d'une réflexion; toute l'énergie incidente n'est pas rayonnée dans l'espace libre. Comme il ne se propage qu'un seul mode dans le guide circulaire, il nous est facile de mesurer la portion d'énergie réfléchie, en faisant la mesure classique des ondes stationnaires. On disposera donc entre l'excitation du guide et l'embouchure un mesureur d'onde stationnaire d'après la figure 14. Le taux d'onde stationnaire est lié au coefficient de réflexion par la relation

$$\eta = \frac{1 - |r|}{1 + |r|},$$

d'autre part, de la relation de conservation de l'énergie

$$|t|^2 = 1 - |r|^2,$$

on déduit

$$|t| = \frac{2\sqrt{\eta}}{1 + \eta}.$$

La figure 15 représente η et $|t|$ en fonction de $\frac{d}{\lambda}$. On remarque que $|t|$ décroît si $\frac{d}{\lambda}$ décroît. Nous retrouvons dans ce problème mixte, qui tient à la fois du guide et de l'ouverture dans une plaque, un phénomène analogue à celui signalé précédemment pour l'ouverture dans un écran. C'est au voisinage

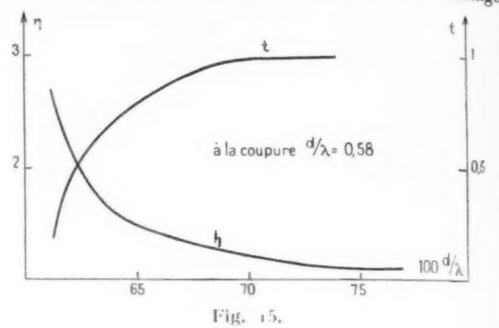


Fig. 15.

de la longueur de coupure du guide que diminue de façon appréciable le coefficient de transmission de l'ouverture. Revenons maintenant au problème précédent.

Cas où $a \geq \frac{\lambda}{2}$. — Lorsque a s'approche de $\frac{\lambda}{2}$ (ξ voisin de 0,9), on constate que les espacements des maxima de transmission *ne sont plus régulièrement espacés* dans le cas des plus grands diamètres d'ouvertures. Ce cas s'étend aux ouvertures de diamètre quelconque si $a \geq \frac{\lambda}{2}$.

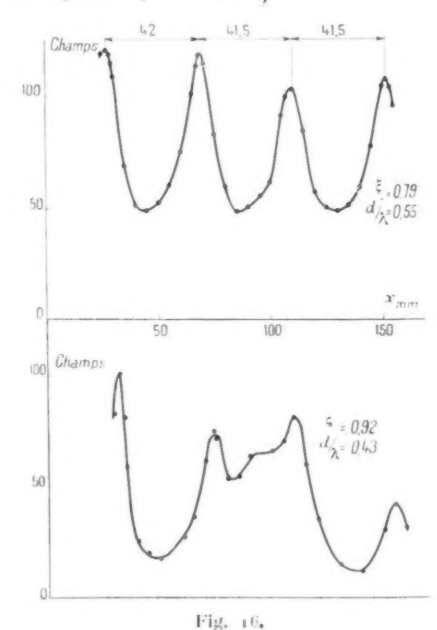


Fig. 16.

Ceci correspond dans l'analogie développée plus haut à l'apparition de nouveaux modes dans le guide d'onde fictif. Les modes $\mathcal{H}_{10}$ et $\mathcal{E}_{01}$ ne sont

plus évanescents, ils se propagent en se superposant au mode principal (l'onde plane ordinaire). On ne retrouve plus de maxima régulièrement espacés. L'apparition d'irrégularités pour $0,9 < \alpha < 1$ s'explique par l'existence de modes $\mathcal{H}_{10}$ et $\mathcal{E}_{01}$ *évanescents*. Ils entrent alors en ligne de compte, car leur atténuation tend vers zéro si α tend vers 1. Sur la figure 16 nous avons représenté des courbes de variation du champ transmis en fonction de l'écartement x pour $\alpha = 0,92$ et $\alpha = 0,79$.

Lorsque l'intérêt s'est porté vers 1936 sur la propagation des ondes électromagnétiques dans les guides, L. Brillouin [25] avait trouvé une explication physique intuitive des différents modes de propagation du guide rectangulaire en considérant les réflexions successives d'une onde plane entre deux plans conducteurs. Nous pouvons utiliser ici une méthode inverse qui, à partir du guide fictif considéré et des modes $\mathcal{H}_{10}$ par exemple, nous permet de retrouver dans les diagrammes de rayonnement d'une plaque, les franges d'interférences que l'on obtient par un raisonnement direct.

Soient deux ondes planes se propageant dans les

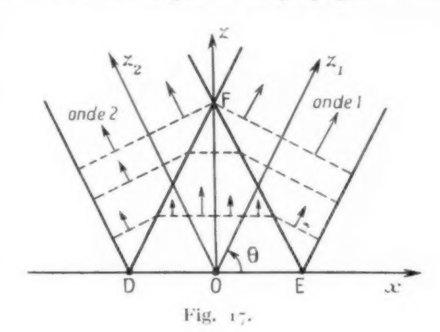


Fig. 17.

directions Oz_1 et Oz_2 (*fig.* 17) également inclinées d'un angle θ sur l'écran et dont la polarisation est perpendiculaire au plan xOz.

Limitons la portion de l'écran intéressé au segment DE. Ces deux ondes interfèrent dans le triangle DEF. Leurs composantes sont suivant $Oxyz$, A étant une constante.

Onde 1 :

$$H_x = A\, e^{ik(x\sin\theta + z\cos\theta)}(-\sin\theta),$$
$$H_z = A\, e^{ik(x\sin\theta + z\cos\theta)}(\cos\theta),$$
$$E_y = A\, e^{ik(x\sin\theta + z\cos\theta)}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Onde 2 :

$$H_x = A\, e^{ik(-x\sin\theta + z\cos\theta)}(-\sin\theta),$$
$$H_z = A\, e^{ik(-x\sin\theta + z\cos\theta)}(-\cos\theta),$$
$$E_y = A\, e^{ik(-x\sin\theta + z\cos\theta)}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

En additionnant on obtient les composantes de l'onde d'interférence

$$H_x = -4A\cos(kx\sin\theta)\, e^{ikz\cos\theta}\sin\theta,$$
$$H_z = 4Ai\sin(kx\sin\theta)\, e^{ikz\cos\theta}\cos\theta,$$
$$E_y = 4A\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cos(kx\sin\theta)\, e^{ikz\cos\theta}$$

en prenant $\sin\theta = \frac{\lambda}{2a}$ on voit que les formules précédentes ne sont autres que les formules II des modes magnétiques au cas $n_1 = 1$, $n_2 = 0$.

En effet

$$k\sin\theta = \frac{\pi}{a},$$
$$k\cos\theta = k_z, \qquad \text{avec} \quad k_z^2 = k^2\left[1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2\right].$$

Fig. 18.

Les ondes 1 et 2 ont une réalité physique. En effet, considérons des sources isolées espacées régulièrement d'une longueur a suivant Ox (*fig.* 18). Un raisonnement classique dans la théorie des interférences montre qu'il existe une frange à l'infini si $\lambda < 2a < 2\lambda$ dans les directions θ et $\pi - \theta$ avec

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2a}.$$

Cette relation n'est autre que la relation de Bragg classique en cristallographie pour la diffraction des rayons X.

En résumé, si a croît, il naît dans le guide fictif des modes d'ordre supérieur. Chacun d'eux correspond à deux directions de propagation privilégiées. On retrouve les figures de diffraction classiques avec des franges à l'infini correspondantau rayonnement de sources isolées dont les distances moyennes sont supérieures à λ.

Équivalence d'une plaque percée d'ouvertures et d'une lame de diélectrique.

Considérons une plaque métallique p percée comme précédemment d'ouvertures circulaires de diamètre d dont les centres forment un quadrillage de côté $2a$. Nous avons vu qu'une telle plaque est équivalente à une impédance ; en particulier, l'onde

transmise possède une phase différente de l'onde incidente. Plus exactement, son avance de phase donnée par $\frac{\pi}{2} - |u| = \alpha$ peut varier entre zéro et $\frac{\pi}{2}$. Si nous envisageons un assemblage de plaques p parallèles à des distances égales, nous voyons que nous augmentons la phase de l'onde transmise. Si nous rapportons le déphasage à la dimension longitudinale, nous pouvons parler *de vitesse de phase différente de celle du vide*, donc d'indice différent de l'unité.

Le rapprochement entre les effets observés sur les ondes hertziennes par des structures en réseau et les effets optiques des verres a été fait en particulier par W. E. Kock [26]. En effet, à l'échelle de l'atome, on estime que le retard de phase des ondes lumineuses traversant des substances transparentes d'indice supérieur à l'unité est amené par la diffraction des électrons liés aux molécules. Considérant un réseau d'éléments métalliques dont les mailles sont inférieures à λ, Kock a comparé leur action sur des ondes hertziennes à celle des électrons liés sur des ondes lumineuses. L'indice absolu n d'un tel milieu est défini par la formule $v = \frac{c}{n}$; v, vitesse de phase de l'onde qui s'y propage; c, vitesse de phase de l'onde dans le vide. On peut donc, si l'on connaît la vitesse de phase, définir l'indice d'un milieu pour poursuivre l'analogie, en remarquant toutefois que la définition de l'indice n'amène aucune notion nouvelle.

Revenons à l'empilement (A) de plaques p précédemment considéré. Considérons la structure (B) formée de l'empilement d'écrans complémentaires de p, c'est-à-dire, des plans chargés de disques circulaires. (B) va former un milieu comme ceux décrits par Kock, qui diminue la vitesse de phase d'une onde incidente; son indice équivalent est supérieur à l'unité. Au contraire, la structure (A) augmente la vitesse de phase, son indice équivalent est inférieur à l'unité. Une telle structure complémentaire du milieu d'indice supérieur à l'unité n'existe pas à l'échelle des ondes optiques.

Ces analogies, bien qu'intéressantes physiquement, ne correspondent pas exactement à la réalité [27]. Les coefficients de réflexion et de transmission d'une lame diélectrique d'épaisseur l, d'indice n, rapportés au plan médian peuvent s'écrire R et T, tels que

$$\text{(III.5)} \qquad \frac{1}{T} = \left[\cos\frac{2\pi nl}{\lambda} + i\,\frac{1+n^2}{2n}\sin\frac{2\pi nl}{\lambda}\right] e^{-i\frac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$\text{(III.6)} \qquad \frac{1}{R} = \left[\frac{1+n^2}{1-n^2} - i\,\frac{2n}{1-n^2}\operatorname{cotg}\frac{2\pi nl}{\lambda}\right] e^{-i\frac{2\pi l}{\lambda}}.$$

On voit que les formules (III.5) et (III.6) ne peuvent être rendues équivalentes aux formules

$$\text{(III.3)} \qquad t = -i\sin u\, e^{iu},$$

$$\text{(III.4)} \qquad r = -\cos u\, e^{iu}$$

qui nous ont servi à représenter les propriétés d'une plaque percée d'ouvertures. Par contre, les formules (III.3) et (III.4) ont été utilisées par Ch. Mauguin [28] lors de son calcul des coefficients de transmission et de réflexion d'un plan chargé d'électron, destiné à l'étude des cristaux. C'est vers l'optique cristalline que nous devons nous tourner pour trouver une analogue exacte. On pouvait le prévoir, des structures telles que (A) et (B) étant anisotropes suivant qu'on les considère normalement ou parallèlement aux plans des écrans..

Analogie avec une lame cristalline.

Dans les écrans précédemment étudiés, l'onde polarisée incidente conservait sa polarisation. Il peut ne plus en être de même dans un écran quelconque.

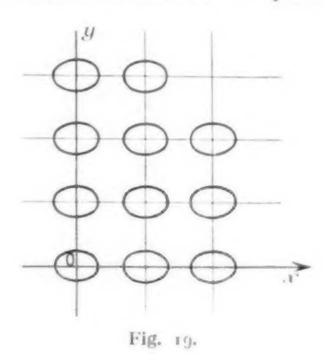


Fig. 19.

Soit, par exemple, un écran percé d'ouvertures possédant des axes de symétrie rectangulaire parallèles aux directions Ox et Oy et dont les centres forment un quadrillage régulier (*fig.* 19). Nous avons vu que, si les distances de ces centres sont inférieures à λ, une onde incidente plane polarisée suivant Ox ou Oy donne en tombant sur un tel écran une onde plane transmise et une onde plane réfléchie polarisée comme l'onde incidente. Les coefficients de transmission ne sont pas les mêmes en amplitude et en phase suivant que la polarisation est parallèle à Ox ou Oy. En reprenant le raisonnement déjà effectué pour l'ouverture unique possédant deux axes de symétrie rectangulaire, c'est-à-dire en décomposant suivant Ox et Oy une onde incidente, de polarisation quelconque, on voit que cette dernière donne des ondes planes transmises

et réfléchies ***polarisées elliptiquement***. La condition suffisante pour qu'un tel écran donne cet effet est qu'on ait des coefficients de transmission différents pour des ondes de polarisation parallèle à Ox ou à Oy.

Exemple. — Soit un écran e de 65×65 cm, constitué de bandes métalliques planes parallèles de 2 mm d'épaisseur, de 4 cm de largeur et espacées de 4 cm. En A nous plaçons un émetteur d'onde de longueur d'onde 8,20 cm terminé par un cornet, en B un récepteur constitué par un cornet pouvant tourner autour de l'axe AB et pouvant nous permettre d'apprécier la polarisation de l'onde transmise. Nous disposons deux écrans e parallèles distants de 54 mm à mi-distance entre A et B et normalement à AB. Si l'angle que font les lamelles des deux écrans (parallèles entre elles) avec la polarisation de l'onde incidente est de 45°, l'onde transmise est polarisée circulairement. En effet, au cours de la rotation du cornet en B l'indication du champ reçu varie peu (facteur 1,4 en champ). La faible variation peut être due à l'effet de bord des plaques.

Analogie avec l'optique cristalline. — On sait qu'en Optique cristalline, on distingue trois catégories de cristaux :

a. Les cristaux possédant plus de deux axes de symétrie d'ordre supérieur à deux;

b. Les cristaux possédant un axe de symétrie d'ordre supérieur à deux ou cristaux uniaxes;

c. Les cristaux ne possédant pas d'axe de symétrie d'ordre supérieur à deux ou cristaux biaxes.

Soit une lame à faces parallèles dont les faces sont normales à Oz, constituée par un cristal de la classe c dont l'axe est parallèle à Oz. Si nous faisons tomber sur cette lame un onde lumineuse polarisée dont la direction de propagation est Oz, nous observons que l'onde transmise conserve sa polarisation si l'onde incidente est polarisée suivant l'une des deux directions rectangulaires Ox, Oy. Dans le cas contraire, l'onde transmise a une polarisation elliptique. C'est ce que nous retrouvons avec les écrans précédemment envisagés. L'axe Oz est pour ces derniers un axe de symétrie d'ordre deux. Considérons maintenant l'écran sur lequel nous avons fait les mesures du coefficient de transmission, c'est-à-dire l'écran métallique percé d'ouvertures circulaires égales dont les centres sont disposés suivant les sommets d'un quadrillage de côtés égaux. L'axe Oz est un axe de symétrie d'ordre quatre pour cet écran. Il doit donc présenter des analogies avec les cristaux de la classe b. Effectivement, comme ces derniers, il conserve la polarisation d'une onde incidente plane dont la direction de propagation est parallèle à Oz. On peut imaginer d'autres écrans possédant des propriétés analogues. Par exemple, l'écran constitué par des ouvertures circulaires égales dont les centres sont les sommets de triangles équilatéraux accolés (*fig.* 20). Pour un

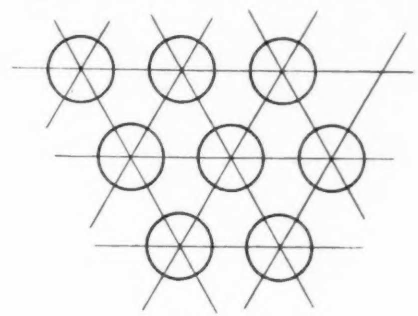


Fig. 20.

tel écran, l'axe Oz est un axe de symétrie d'ordre trois. *On vérifie par l'expérience qu'un tel écran ne modifie pas la polarisation d'une onde plane en incidence normale.*

On peut répéter ce qui vient d'être dit pour un écran au sujet de systèmes formés d'écrans identiques normaux à l'axe Oz et régulièrement espacés, ou pour un système analogue formé d'écrans complémentaires.

Remarquons que le milieu décrit par Kock formé de petites sphères métalliques disposées suivant les sommets d'un réseau cubique peut être rapproché d'un cristal de la classe a.

Nous allons voir comment cette analogie avec les cristaux se prolonge et se complète dans le cas où la direction de propagation de l'onde incidente n'est plus normale à l'écran.

CHAPITRE IV.

Diffraction par un écran plan métallique d'une onde plane sous une incidence quelconque.

Jusqu'à maintenant nous avons étudié la diffraction d'une onde plane par un écran métallique plan, percé d'une ou plusieurs ouvertures, lorsque la direction de propagation de cette onde plane est normale à l'écran. Proposons-nous d'étudier maintenant le cas d'une incidence oblique. Nous nous

limiterons aux cas où le vecteur électrique de l'onde incidente est normal ou bien parallèle au plan d'incidence. Nous désignerons ces ondes incidentes par les notations respectives $E_\perp$, $E_\parallel$.

Cas de l'ouverture unique.

Nous avons examiné au chapitre II le problème de l'ouverture unique dans un écran métallique indéfini lorsque la direction de propagation de l'onde incidente est normale au plan de l'écran. Nous avons vu qu'il nous fallait trouver, dans l'espace $z > 0$, une onde E_2H_2 telle que $E_{2T} = 0$ sur S et $H_{2T} = H_0 =$ const. sur Σ, S étant la surface de l'écran, Σ celle de l'ouverture. La condition $H_{2T} =$ const. sur Σ entraîne, comme on le voit à l'aide des équations de Maxwell,

$$E_{2n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Au contraire, si l'onde est inclinée nous devons écrire

(IV.1) $$H_{2T} = H_{0T}.$$

qui entraîne

(IV.2) $$E_{2n} = E_{0n} \neq 0$$

Pour une onde $E_\perp$ ou une onde $E_\parallel$ peu inclinée sur Oz, l'égalité (IV.1) est peu différente du cas de l'onde incidente normale. La constante du second membre de l'égalité est remplacée par $e^{jkx\cos\theta}$. Si $x \cos \theta$ reste petit devant λ dans l'ouverture, ce terme est petit.

Au contraire, l'égalité (IV.2) est très différente suivant que nous avons affaire à une onde $E_\perp$ ou à une onde $E_\parallel$. Pour une onde $E_\perp$, nous avons la même condition que dans le cas d'une incidence normale. Pour une onde $E_\parallel$, nous trouvons

(IV.3) $$E_{2n} = E_0 \sin\theta \, e^{jkx\cos\theta}.$$

Cas de l'ouverture circulaire petite devant la longueur d'onde.

Dans le cas de l'ouverture circulaire petite devant la longueur d'onde, Bethe a cherché à obtenir le champ rayonné par l'ouverture attaquée par une onde $E_\parallel$ en superposant au champ satisfaisant aux conditions de l'onde en incidence normale, c'est-à-dire

$$\left.\begin{array}{l} H_{2T} = \text{const.}, \\ E_{2n} = 0 \end{array}\right\} \text{dans } \Sigma$$

un champ satisfaisant à

$$\left.\begin{array}{l} H_{2T} = 0, \\ E_{2n} = E_{0n} \end{array}\right\} \text{dans } \Sigma,$$

les condititions aux limites du conducteur métallique sur l'écran étant remplies. Pour cela, il répartit sur Σ des courants magnétiques **j**, de divergence nulle de façon à ne pas modifier les charges magnétiques ou, si l'on préfère, le champ magnétique tangentiel. En écrivant que ces courants magnétiques donnent naissance à un champ électrique normal, il trouve pour **j**

$$\mathbf{j} = \frac{\gamma}{\sqrt{a^2 - r^2}} \mathbf{r} \times \mathbf{E}_0 \qquad (\gamma \text{ coefficient constant}).$$

Bien que cette solution ne soit évidemment pas la seule de l'équation aux dérivées partielles qui permet de déterminer cette solution, elle est plus satisfaisante que la solution donnée dans le cas de l'onde incidente normale. En effet, le champ électrique tangentiel dans l'ouverture provenant des courants magnétiques précédents, devient infini comme l'inverse de la racine carrée de la distance du contour. Bethe a montré que le rayonnement au loin de ces courants magnétiques est équivalent au rayonnement d'un doublet électrique d'axe Oz. Il est maximum pour une direction du plan xOy, nul pour la direction Oz. Ce doublet électrique ne prend naissance que lors d'une excitation par une onde $E_\parallel$, dans ce cas nous superposons au champ de l'incidence normale dont les conditions aux limites sont dans l'ouverture

$$H_{2T} = H_0,$$
$$E_{2n} = 0.$$

Le champ E_2H_2 considéré précédemment dont les conditions aux limites sont

$$H_T = 0,$$
$$E_{2n} = E_0 \sin\theta.$$

La superposition de ces deux champs amène à donner pour une onde $E_\parallel$ incidente, un *coefficient de transmission de l'ouverture supérieur à celui de l'incidence normale*, en fait le facteur dont Bethe multiplie ce dernier est $\frac{1}{4} + 1 \sin^2\theta$.

Au contraire, dans le cas d'une onde incidente $E_\perp$, le doublet électrique le long de l'axe n'est pas excité, le champ électrique de l'onde incidente n'ayant pas de composante le long de Oz. Le champ diffracté a pour conditions aux limites sur Σ

$$H_{2T} = H_0 \cos\theta,$$
$$E_{2n} = 0.$$

Ces conditions sont analogues à celles qui correspondent à une onde en incidence normale. Nous n'avons fait que multiplier l'onde incidente par $\cos\theta$.

C'est pourquoi Bethe a déduit du coefficient de transmission en puissance pour une incidence, celui d'une onde $E_\perp$ en multipliant par le facteur $\cos^2 \theta$.

En résumé, Bethe a trouvé que pour une onde $E_\parallel$, la transmission augmente, tandis que pour une onde $E_\perp$ elle diminue par rapport à la transmission en incidence normale.

Étude de la transmission d'un écran pour une incidence oblique.

Considérons l'écran que nous avons déjà étudié en incidence normale au chapitre III, c'est-à-dire l'écran percé d'ouvertures circulaires égales dont les centres sont disposés suivant les sommets d'un quadrillage régulier. Proposons-nous d'étudier sa transmission pour une onde incidente oblique.

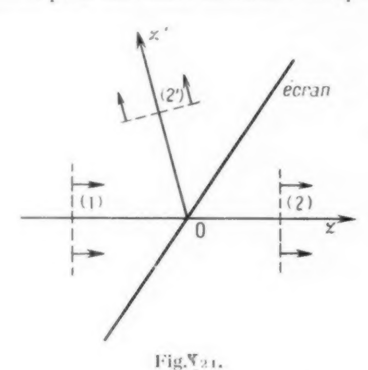


Fig. 21.

L'onde transmise par une plaque unique se propage au loin dans la même direction que l'onde incidente 1. Par contre, l'onde réfléchie 2' se propage suivant la direction Oz qui fait avec la plaque le même angle que la direction Oz (*fig.* 21). La vérification expérimentale s'effectue en mesurant le champ rayonné par une plaque de dimension finie, sur laquelle on fait tomber l'onde d'un cornet émetteur. On constate que le diagramme du champ transmis présente toujours un maximum dans l'axe du rayonnement incident. La vérification peut s'effectuer de même pour l'onde réfléchie à partir d'un angle d'inclinaison assez grand. En effectuant ces expériences il faut prendre garde aux effets de diffraction des bords des plaques qui peuvent devenir très importants. On a utilisé une plaque de 130 × 65 cm un cornet émetteur de 25 × 25 cm et 35 cm de profondeur, à une distance de 3 m de la plaque. Le diagramme a été relevé à 3 m avec un cornet analogue au précédent. La longueur d'onde était 8,20 cm.

L'onde réfléchie et l'onde transmise vérifient bien les relations de symétrie mises en évidence au chapitre I. Nous pouvons donc nous borner à étudier l'onde transmise.

Il est possible de conserver pour des incidences faibles inférieures à 20°, la théorie des ondes guidées que nous avions admise pour l'incidence normale Les parois du guide sont alors parallèles à la direction Oz de l'onde incidente pour l'onde transmise et Oz' pour l'onde réfléchie. L'obstacle constitué par l'élément de plaque n'est plus normal aux parois du guide fictif. Dans le cas où seule l'onde plane se propage dans ce guide fictif $\left(a < \frac{\lambda}{2}\right)$, il n'est donc plus possible de représenter l'obstacle par la formule

$$t = -i \sin u \, e^{iu}.$$

Il faut reprendre la formule plus générale de l'obstacle mince

$$t = -i \sin u \, e^{i\varphi}.$$

Un tel obstacle est donc caractérisé par deux paramètres φ et u; si l'angle d'incidence β tend vers zéro, φ tend vers u; en général φ est supérieur à u.

Pour des angles β petits on peut penser à utiliser des développements limités pour φ et u, le premier terme serait évidemment un terme en β^2.

Nous verrons dans quelle mesure l'expérience justifie ce point de vue en étudiant la transmission de deux plaques parallèles en incidence oblique.

Cas d'une onde incidente $E_\parallel$.

Dans le cas d'une onde $E_\perp$, nous avons vu que le champ dans l'ouverture était peu modifié, on peut adapter directement la théorie du guide fictif développée en incidence normale.

Il n'en n'est plus de même dans le cas d'une onde incidente $E_\parallel$. Il naît un nouveau « mode ». Le champ excité par l'onde incidente normale possède un champ magnétique parallèle à l'axe, on peut le rapprocher d'un *mode magnétique* d'un guide d'onde. Nous avons vu, dans le cas de l'ouverture circulaire de faibles dimensions devant la longueur d'onde, qu'il fallait ajouter pour une onde incidente $E_\parallel$, un champ possédant un vecteur électrique normal à l'ouverture, donc à rapprocher d'un *mode électrique*.

Des courants magnétiques dans l'ouverture, dans le cas de l'ouverture unique et petite dans l'écran métallique indéfini, permettent de représenter le champ diffracté. Ces courants n'obéissent pas aux mêmes relations de symétrie que ceux qui nous permettent de représenter l'onde diffractée en incidence normale. En effet, prenons des axes rectangulaires passant par le centre de l'ouverture; si x se

change en $-x$, j_x ne change pas de signe et j_y se change en $-j_y$. Si y se change en $-y$, j_y ne change pas de signe et j_x se change en $-j_x$. Il n'est donc plus possible de découper le rayonnement de plusieurs guide ne possède pas d'onde principale. Si $a < \frac{\lambda}{2}$, *tous ses modes sont évanescents.* Cette représentation de l'onde transmise à l'aide de ce guide fictif a surtout

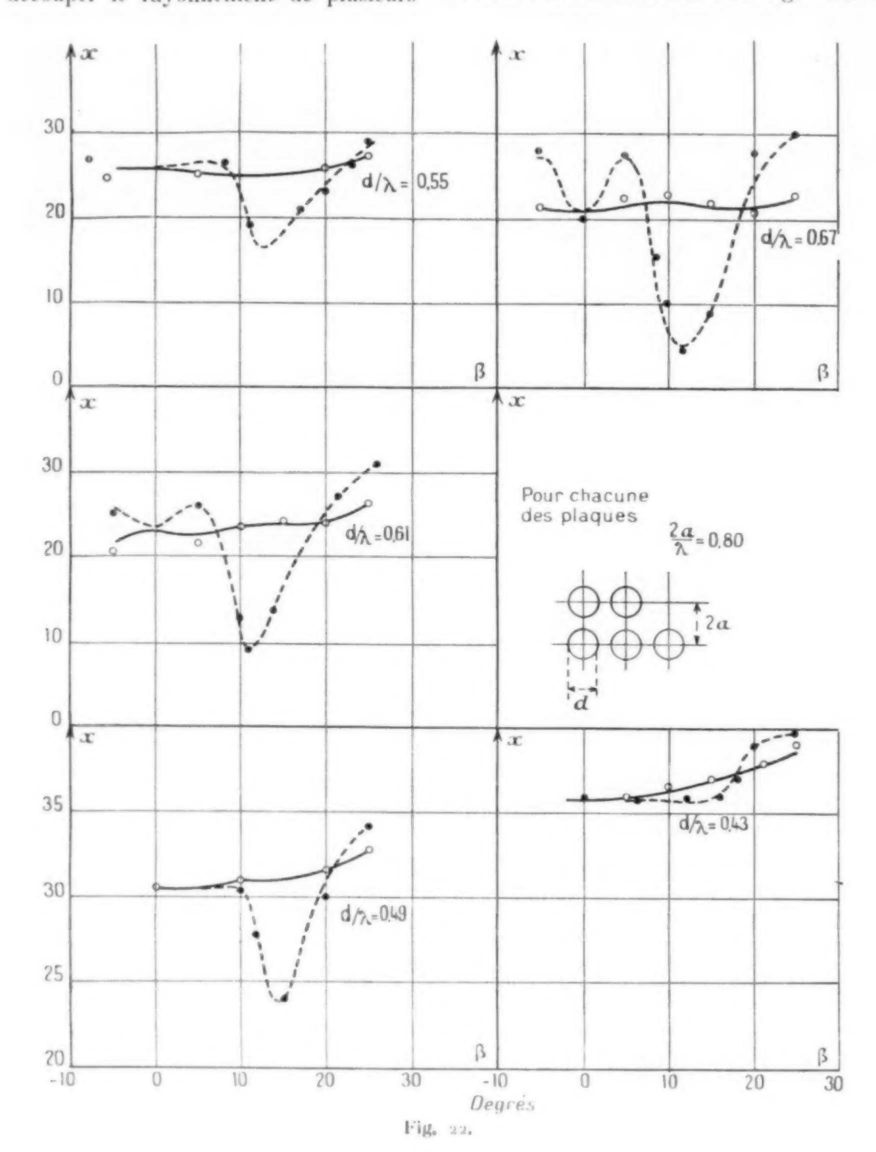


Fig. 22.

ouvertures régulièrement disposées à l'aide du guide fictif qui nous avait servi pour une onde incidente normale dont deux parois sont d'impédance nulle et deux d'impédance infinie. Un raisonnement analogue à celui du chapitre III nous amène à adopter un guide fictif de contour AB, $A'B'$ et dont *toutes les parois sont d'impédance infinie.* Un tel une valeur qualitative, elle nous permet d'interpréter un résultat trouvé en étudiant la transmission de deux plaques parallèles en incidence oblique.

Étude expérimentale.

Cherchons à utiliser la méthode expérimentale du chapitre III. Nous disposons deux cornets émet-

teur et récepteur en A et B, et à égale distance entre ces deux cornets deux plaques égales dont nous pouvons faire varier la distance x. En écartant les plaques à partir de $x = 0$ on passe par plusieurs valeurs de x pour lesquelles on a un maximum de transmission. La première valeur de x nous a permis de calculer le coefficient de transmission d'une plaque en incidence normale. De plus, nous avons remarqué que les différentes valeurs de x étaient espacées de $\frac{\lambda}{2}$; cet espacement régulier justifie l'hypothèse de l'onde unique se propageant dans un guide.

On doit s'attendre à ce qu'il n'en soit plus de même en incidence oblique, où la théorie de l'onde guidée ne s'applique plus exactement.

En effet, en incidence oblique, l'expérience montre que la courbe du champ transmis par deux plaques parallèles en fonction de leur écartement x, possède des maxima irrégulièrement disposés. Cette irrégularité, qui s'observe dès une inclinaison de 7 à 8° est surtout importante pour des ouvertures qui ne sont pas petites devant la longueur d'onde. Elle s'obtient même pour des écartements importants (par exemple x voisin de 5λ). Néanmoins, il semble qu'on puisse affirmer que la distance moyenne de deux maxima consécutifs augmente légèrement si l'inclinaison croît.

En résumé, l'expérience montre que nous ne pouvons plus représenter exactement l'onde transmise par une portion d'onde plane indéfinie. Toutefois, on peut encore conserver la théorie précédente pour de faibles inclinaisons, c'est-à-dire admettre qu'une plaque inclinée est l'analogue d'un obstacle sur une ligne de transmission représenté par deux paramètres u et φ. La valeur de φ nous donne la phase de l'onde transmise par rapport à l'onde incidente, celle de u la valeur absolue du coefficient de transmission. Dans ces conditions, la position des maxima de transmission de deux plaques parallèles nous donne la valeur de φ. Il suffit de remplacer u par φ dans la formule $\theta = u + k\pi$ du chapitre III.

Sur la figure 22 nous avons représenté les variations de la position du premier maximum en fonction de l'angle β d'incidence. En abscisse, les angles sont portés en degrés, en ordonnée x en millimètres. Les courbes en traits pleins sont relatifs aux ondes incidentes $E_\perp$, les courbes en tirets aux ondes $E_\parallel$.

On remarque immédiatement une forte différence entre ces deux familles de courbes. Pour une onde $E_\perp$, x augmente assez régulièrement avec β, indiquant une *augmentation du déphasage* φ. On comprend que corrélativement *la transmission diminue*. L'expérience directe de transmission avec une seule plaque, mis à part d'importants effets de diffraction de bord, le montre également. Au contraire, pour une onde $E_\parallel$, x, après une légère augmentation, décroît brutalement pour β aux environs de 10°, et cela d'autant plus que le diamètre de l'ouverture est grand, puis il augmente et dépasse rapidement la valeur correspondante pour une onde $E_\perp$. Nous pouvons donc en déduire *des variations analogues pour* φ et inverses pour la transmission. D'ailleurs, l'expérience directe avec une seule plaque montre que *la transmission augmente jusqu'à un maximum pour* β *voisin de* 10° *et décroît brutalement.*

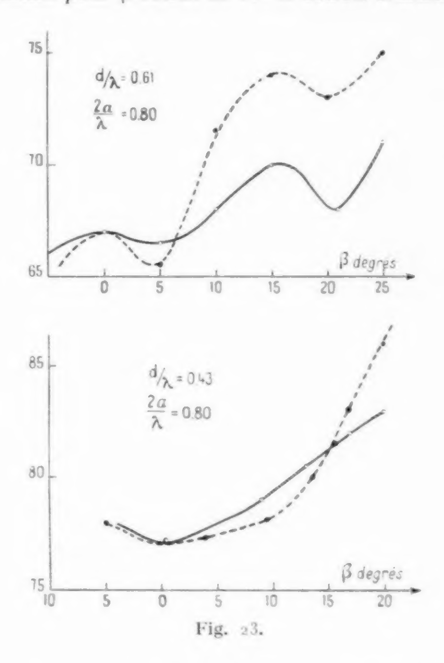


Fig. 23.

Vers 20°, 25°, le coefficient de transmission d'une onde $E_\parallel$ devient rapidement inférieur à celui d'une onde $E_\perp$.

L'augmentation de la transmission et la diminution du déphasage s'expliquent bien par la naissance de ce que nous avons appelé le mode électrique de l'ouverture. Nous avons vu que ce dernier était excité seulement par une onde $E_\parallel$ et qu'alors on pouvait le superposer au *mode magnétique* de l'ouverture en incidence normale. Nous avons vu enfin que ce mode ne pouvait se propager. L'expérience le confirme. En effet, cherchons les variations de x correspondant au second maximum de transmission. Pour une onde $E_\perp$ nous trouvons une courbe analogue à celle trouvée pour la position du premier maximum. Pour une onde $E_\parallel$, elle diffère beaucoup, surtout pour les plus grands

diamètres d'ouverture. Elle ne présente plus de variations importantes vers 10° (*fig.* 23) et se rapproche de la courbe correspondante à $E_\perp$.

Analogies avec un diélectrique.

Nous avons vu au chapitre III l'analogie qui pouvait exister pour une onde incidente normale entre un écran et une lame de diélectrique. Cette analogie est fondée sur l'avance de phase qu'on obtient en empilant une série d'écrans à des distances égales.

Or, nous avons remarqué que le coefficient de transmission d'une plaque est différent suivant qu'on a une onde incidente $E_\perp$ ou $E_\parallel$. Pour une onde $E_\parallel$, le module du coefficient de transmission t décroît constamment. Pour une onde $E_\parallel$, *il augmente jusqu'à un maximum*, puis décroît et rejoint le coefficient de transmission pour une onde $E_\perp$ de même inclinaison. Nous retrouvons un phénomène analogue avec une lame à face parallèle homogène de diélectrique [27]. Nous savons que sous *l'incidence Brewstérienne* la transmission de la lame est égale à l'unité L'angle d'incidence β est donné par la formule

$$\operatorname{tg} \beta_0 = n$$

pour un verre $\beta_0 > \frac{\pi}{4}$.

Pour un empilement d'écrans l'indice équivalent n est inférieur à l'unité $\beta_0 < \frac{\pi}{4}$. L'expérience le vérifie. Remarquons néanmoins une différence essentielle, la transmission sous l'incidence Brewstérienne n'est pas égale à l'unité dans le cas d'un seul écran.

Enfin, pour des incidences fortes (supérieures à 30°), la transmission tombe à une valeur pratiquement nulle quel que soit l'angle de la polarisation de l'onde incidente avec le plan d'incidence. On peut rapprocher ce fait du phénomène de la *réflexion totale*. Pour un angle assez fort un rayon incident ne pénètre pas dans un milieu d'indice inférieur à l'unité.

Analogie avec un cristal.

Nous avons vu au chapitre III les analogies qu'on relève en incidence normale entre un écran xOy et un cristal d'axe Oz normal à xOy. En particulier, l'écran constitué d'une plaque métallique percée d'ouvertures circulaires égales dont les centres forment un quadrillage, est analogue à un cristal uniaxe.

Nous retrouvons cette analogie pour une incidence oblique. Soit β l'angle que fait l'onde incidente avec le plan xOy de l'écran. On peut supposer que le plan d'onde est normal à zOx, par exemple, sans réduire la généralité, puisque l'axe Oz est un axe de symétrie d'ordre supérieur à deux.

Une onde incidente $E_\perp$ ou une onde $E_\parallel$ (*fig.* 24) est transmise à travers l'écran sans changement de polarisation; mais, ni le module, ni la phase de la transmission ne sont les mêmes pour ces deux ondes. Une onde incidente quelconque peut se décomposer en une somme d'onde $E_\perp$ et d'onde $E_\parallel$. L'onde transmise aura donc *une polarisation elliptique*.

Expérience. — Soient deux cornets émetteur et récepteur en A et B dont les polarisations sont croisées, l'une est dirigée suivant Ox, l'autre suivant

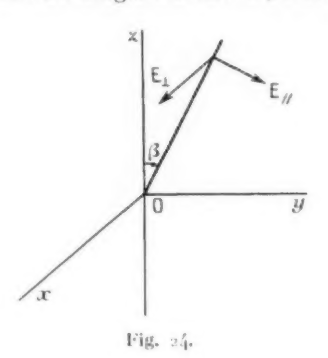


Fig. 24.

Oy. On ne reçoit rien en B. Supposons que nous disposions l'écran à mi-distance entre A et B, normalement à AB. Nous ne recevons rien. Inclinons-le, soit autour d'un axe parallèle à Ox, soit autour d'un axe parallèle à Oy. Nous ne recevons également rien. La polarisation de l'onde transmise est la même que celle de l'onde incidente. Au contraire, si nous *l'inclinons autour d'une droite du plan xOy autre que Ox ou Oy nous rétablissons la réception*. D'ailleurs, on ne peut éteindre cette dernière dans aucune position angulaire du cornet récepteur. L'onde *transmise est polarisée elliptiquement*. C'est exactement l'expérience qu'on pourrait faire en Optique classique avec un cristal uniaxe. Étant donné une onde incidente dont la direction de propagation fait un certain angle avec l'axe, il existe deux directions normales entre elles telles que l'onde transmise a même polarisation que l'onde incidente si cette dernière a sa polarisation dirigée suivant l'une de ces deux directions. Dans le cas contraire, l'onde transmise est polarisée elliptiquement. A ces deux directions rectangulaires situées l'une dans le plan formé par le rayon incident et l'axe (ici zOx), l'autre normale à ce plan, correspondent deux vitesses de propagation dans le cristal ou si l'on

préfère deux indices; l'un, l'indice ordinaire pour la polarisation de l'onde incidente normale à zOx; l'autre, l'indice extraordinaire pour la polarisation dans le plan zOx.

Revenons au problème de l'écran. Ce que nous appelons onde $E_\perp$ est l'onde dont le plan de polarisation est parallèle au plan zOx, onde $E_\parallel$ l'onde dont le plan de polarisation est normal à ce plan. *En remplaçant indice par déphasage* nous voyons qu'à l'onde $E_\perp$ correspond le *déphasage ordinaire*, à l'onde $E_\parallel$ *le déphasage extraordinaire.*

De même, que l'indice ordinaire est égal à l'indice en incidence normale, de même le déphasage pour une onde $E_\perp$ est voisin de celui qu'on obtient en incidence normale. Au contraire, le déphasage pour une onde $E_\parallel$ peut être très différent.

Si nous voulons rendre plus étroite l'analogie avec les cristaux, il nous suffit de considérer un empilement d'écrans équidistants et égaux. Nous pouvons alors parler de rayons ou d'indices ordinaire et extraordinaire. En effet, les vitesses de propagation d'onde dépendent alors du déphasage individuel d'une plaque. Si les coefficients de transmission et les déphasages sont faibles, on peut admettre que le coefficient de transmission total et le déphasage sont respectivement le produit et la somme du coefficient de transmission et du déphasage d'une plaque. En divisant le déphasage de l'onde transmise par le déphasage du même trajet dans le vide on peut définir un indice équivalent. Nous voyons ainsi apparaître l'indice ordinaire correspondant à une onde incidente $E_\perp$ et l'indice extraordinaire correspondant à onde $E_\parallel$.

En réalité le phénomène est plus compliqué que pour les cristaux habituellement utilisés en Optique, car un empilement de plaques n'est pas parfaitement transparent. Le phénomène se complique d'atténuation. Il faudrait tenir compte dans l'appréciation du déphasage total, des ondes réfléchies sur chaque écran. Toutefois, pour les grandes lignes, le rapprochement est très intéressant. Il ne saurait nous surprendre, l'existence des ondes ordinaires et extraordinaires se montrant à partir de la seule hypothèse d'anisotropie du milieu diélectrique [20].

CHAPITRE V.

Application à la réalisation d'une lentille hyperfréquence.

Soit Oz l'axe d'un système centré en Optique classique constitué par une lentille mince, S l'onde incidente S' l'onde transmise. D'un élément d'onde incidente s, semblant aboutir en un point P du plan xOy, la lentille transmet un élément d'onde s' semblant provenir du point P (*fig.* 25). A un instant donné, il existe une certaine différence de phase entre un élément s et un élément s'. La lentille a pour effet de rendre variable cette différence de phase suivant le point P. Dans l'approximation de Gauss, une onde sphérique est transformée en une autre onde sphérique de centre de courbure différent.

Nous pouvons appliquer ces définitions à des ondes hyperfréquences. Une lentille est un dispositif qui impose un déphasage variable suivant le point d'impact de l'onde incidente.

Considérons un empilement (A) de plaques p équidistantes. Une plaque p est constituée par un écran métallique mince percé de trous circulaires égaux et dont les centres forment un quadrillage régulier. Une onde plane S tombant en incidence normale sur (A) donne naissance à une onde transmise plane S'. Nous avons vu que la différence de phase entre S et S' dépendait du paramètre $\frac{d}{\lambda}$. Il nous est donc facile d'imaginer qu'un ensemble constitué par un

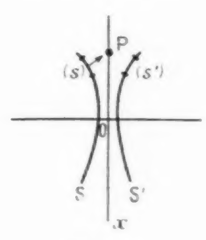


Fig. 25.

empilement de plaques p identiques, mais *percés de trous de diamètres différents* nous permet d'obtenir un déphasage variable, donc de former une lentille hyperfréquence.

Au lieu comme en Optique de construire des lentilles d'indice constant et d'épaisseur variable, nous faisons ainsi l'analogue d'une lame à faces parallèles d'épaisseur constante et d'indice variable.

Étude d'une lentille hyperfréquence.

Précédemment nous avons étudié la transmission d'une plaque métallique percée d'ouvertures circulaires égales régulièrement disposées. a étant la dimension du côté du quadrillage constitué par les centres des ouvertures, nous avons vu que nous pouvions nous ramener à un problème d'ondes guidées. Le guide élémentaire fictif G à section carrée est composé de deux côtés normaux à la polarisation et « d'impédance nulle », les deux autres côtés étant d'« impédance infinie ». Le problème de la transmission d'une telle plaque indéfinie attaquée par une onde plane en incidence normale peut se ramener au problème de l'obstacle dans un tel guide. De la même manière, si nous disposons des plaques identiques et parallèles, la diffraction d'un tel système attaqué

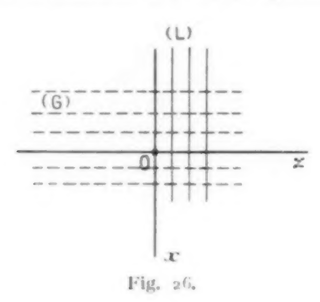


Fig. 26.

par une onde plane en incidence normale se ramène au problème de plusieurs obstacles dans un guide G.

Nous allons faire l'hypothèse que les différents guides G qui permettent de reconstituer l'onde transmise sont *indépendants*, c'est-à-dire qu'une modification d'un obstacle dans un guide n'entraîne pas de modification du régime d'ondes dans un guide voisin.

Pour simplifier, bornons-nous au problème cylindrique. Supposons que le diamètre des ouvertures ne dépende que de leur abscisse x (*fig.* 26).

Pour calculer la transmission d'un tel système nous décomposons donc l'espace en une série de guides G et nous nous ramenons au problème de la transmission d'un tel guide. Sachant qu'il n'y existe qu'un seul mode, l'onde principale qui n'est autre qu'une portion d'onde plane, nous sommes amenés à calculer le filtre simple, constitué par une série d'obstacles selfiques égaux et équidistants sur une ligne de transmission. Ce problème est classique.

Connaissant le paramètre $u = \frac{\pi}{2} - \alpha$ d'un obstacle et la distance qui sépare les différents obstacles, on sait que le coefficient de transmission est donné par une expression où interviennent des polynomes électrosphériques appelés aussi de Tchebyscheff, de même pour la phase de l'onde transmise. A partir de ces deux renseignements, on est à même de choisir le paramètre u pour chaque abscisse x de façon à obtenir un déphasage donné, tout en gardant un coefficient de transmission élevé.

C'est cette dernière condition qui nous impose le nombre de plaques à choisir. En effet, une seule plaque permet d'obtenir sur l'onde transmise une avance de phase allant de α_0 petit à $\frac{\pi}{2}$, par rapport à l'onde incidente. Ces avances de phase correspondent respectivement à des ouvertures de grand et petit diamètre. L'ouverture de petit diamètre n'a qu'une transmission très faible. Nous sommes donc obligés de nous limiter à une avance de phase de $\alpha_1 < \frac{\pi}{2}$. D'autre part, on voit en se reportant aux courbes de la figure 3 (chap. III) que la transmission correspondant à l'ouverture la plus grande possible (diamètre d légèrement inférieur à la distance des centres $2a$), n'est très voisine de l'unité que pour une plage du paramètre $\frac{a}{\lambda}$. Si $\frac{a}{\lambda}$ est trop grand, il se propage plusieurs modes dans le guide fictif, si $\frac{a}{\lambda}$ est trop petit, on ne peut atteindre une transmission égale à l'unité. Donc, en choisissant convenablement $\frac{a}{\lambda}$, on peut ramener α_0 à une valeur très petite. En définitive, le déphasage acceptable obtenu pour une plaque est $\alpha_1 - \alpha_0$ voisin de $\frac{\pi}{4}$.

Pour avoir un déphasage supérieur, tout en conservant une transmission voisine de l'unité on est amené à additionner l'effet de plusieurs plaques. On obtient ainsi avec huit plaques, par exemple, un déphasage pouvant atteindre 2π, la transmission restant partout supérieure à 0,9 dans une bande de fréquence de 10 %.

Lentilles a échelons. — Pour obtenir un déphasage supérieur à 2π on est amené à un nombre de plaques prohibitif, nous avons donc adopté le dispositif de l'échelon, qui a son analogue en Optique classique. Décomposons l'onde incidente en tranches par des plans dont les côtes z diffèrent de 2π (*fig.* 27).

Supposons qu'avec une première lentille nous imposions à la portion d'onde incidente BD un déphasage variable allant jusqu'à 2π, nous la transformons en une onde plane $B''D''$. De même, suppposons qu'à l'aide d'une autre lentille nous agissions sur la portion AB de l'onde S et nous la redressions

en onde plane $A'B'$, les ondes planes $A'B'$ et $B''D''$ provenant de la même surface d'onde S diffèrent de 2π dans leur propagation le long de Oz. Pour le point à l'infini de Oz, ces ondes sont en phase

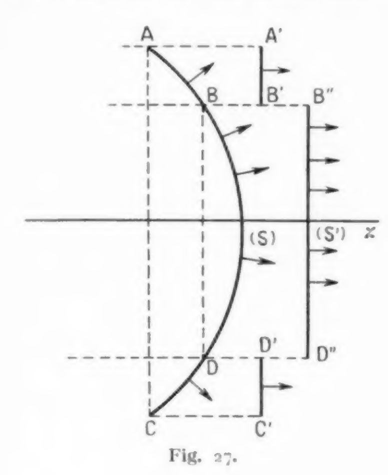


Fig. 27.

et tout se passe comme si la surface d'onde transmise était plane.

Chromatisme. — Les propriétés d'une plaque dépendent des paramètres $\frac{a}{\lambda}$ et $\frac{d}{\lambda}$. Si la fréquence de l'onde incidente varie, les paramètres varient tous deux dans le même sens. On voit sur le réseau de courbes de la figure 13 (Chap. III) que pour $\frac{d}{\lambda} > 0,43$, les variations résultantes de u se retranchent, se compensant ainsi dans une certaine mesure. Néanmoins, si la fréquence augmente, la transmission augmente, et inversement.

De plus, la distance des plaques rapportée à la longueur d'onde varie lorsque la fréquence varie. De ces deux facteurs résulte un déphasage variable avec la fréquence, appelé chromatisme en Optique classique. Ce défaut est évidemment d'autant plus fort que la « surtension » totale du système est plus élevée. On a avantage pour le diminuer à augmenter le nombre des plaques.

Remarquons que cette propriété, qui est un défaut pour une lentille, nous a servi à obtenir des prismes doués de propriétés dispersives. Une onde incidente plane tombant sur un tel prisme est déviée différemment suivant sa fréquence.

Ouverture. — Soit à transformer une onde sphérique en onde plane à l'aide d'une lentille (*fig.* 28), soit $2d$ le diamètre de cette lentille, f la distance du centre de l'onde sphérique à la lentille, le déphasage à rattraper est approximativement $h = \frac{x^2}{2f}$, en particulier aux extrémités $\delta h = \frac{d}{f}\,\delta x$.

Soient s et s' les portions d'onde incidente et transmise à travers la lentille (*fig.* 29), δx la dimension transversale de l'élément d'onde transmis δh est le déphasage correspondant à rattraper. Or, physiquement, on voit qu'il est difficile de dépasser la valeur de $\frac{1}{4}$ pour la quantité $\frac{\partial h}{\partial x}$, ceci impose en effet de rattraper plus de $\frac{\lambda}{4}$ dans une dimension transversale de λ. On est ainsi conduit à limiter le rapport d'ouverture $\frac{f}{2d}$ à la valeur 2.

D'autre part, nous avons vu que l'incidence oblique fait apparaître des phénomènes analogues à la double réfraction dans les cristaux. Cette raison, indépendamment de la précédente, limite l'ouverture pour une lentille à plaques parallèles. Ainsi qu'une chute de la transmission, analogue à la réflexion totale à la surface de séparation de deux diélectriques.

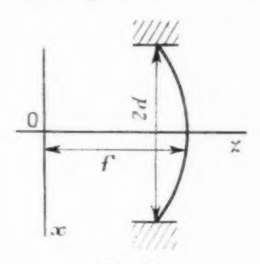


Fig. 28.

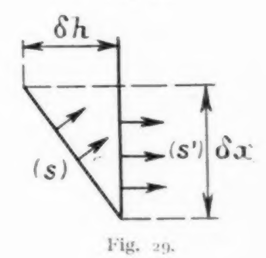


Fig. 29.

Mesures et résultats.

Méthode de mesure. — Le but poursuivi en construisant une lentille est, à partir d'une surface d'onde incidente donnée S, d'obtenir une surface S' donnée. Dans le cas qui nous intéresse, S' est une surface plane. Pour effectuer le calcul de la lentille et vérifier les résultats, il importe donc de pouvoir mesurer la surface d'onde. Or, on peut effectuer cette mesure de façon très précise par des méthodes interférométriques. Ces méthodes sont connues

en hyperfréquence [32]. Nous adoptons le dispositif décrit par J. Ortusi et G. Boissinot [29] qui présente une amélioration sur le système habituellement utilisé (précision double). On se propose de mesurer

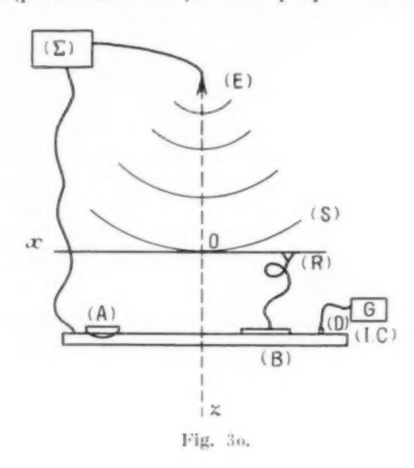


Fig. 30.

la surface d'onde S provenant d'une antenne d'émission E (*fig.* 30).

Pour cela on prélève une partie de l'énergie émise par la source Σ et on la fait battre avec l'onde reçue par la petite antenne réceptrice R dans un guide d'onde. L'énergie provenant directement de Σ est amenée à une extrémité de ce guide et pénètre dans un « banc d'onde stationnaire » B par l'intermédiaire d'un atténuateur A. L'énergie provenant de R est injectée dans le guide par la sonde du chariot mobile de B. Ces deux ondes interfèrent dans le guide. Un détecteur D disposé à l'autre extrémité du guide terminé par une impédance caractéristique (I.C.) donne sur un galvanomètre G

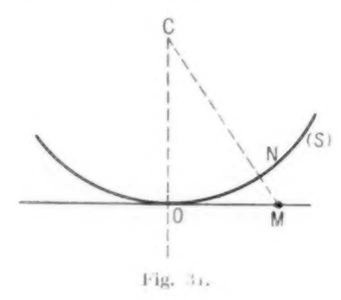


Fig. 31.

la mesure du champ résultant en un point déterminé du guide. Supposons que nous effectuions un réglage tel que l'indication de G soit nulle. On voit qu'un déphasage sur l'onde recueillie par R se traduit par la disparition de ce zéro. On le retrouve en déplaçant le chariot. Ce déplacement du chariot nous donne directement le déphasage de l'onde transmise par R. Remarquons que, pour pouvoir appliquer la méthode, il est nécessaire que l'onde rayonnée par la sonde de B ne soit pas réfléchie aux deux extrémités du guide, c'est ce qui est réalisé expérimentalement. Il est facile d'atteindre une précision de l'ordre de quelques degrés sur l'angle de phase. Pour mesurer la surface de phase S, la pratique montre que la précision la meilleure est obtenue en déplaçant R sur un banc rectiligne. On mesure ainsi une certaine variation de phase. Il suffit, pour reconstituer la surface de phase de porter, suivant la normale CM à la surface de phase, le longueur MN correspondant au déphasage mesuré en M. On connaît, en général, assez bien la direction de CM. Souvent S est voisine d'une sphère de centre C (*fig.* 31).

Exemple de mesure sur une lentille cylindrique. — Plaçons-nous à 3 600 Mc ($\lambda = 8{,}30$ cm). Un cornet C placé au foyer d'un miroir hyperbolique R donne en O une onde S peu différente d'une

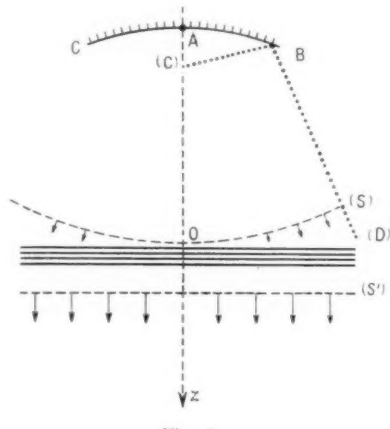


Fig. 32.

sphère ayant pour centre le second foyer de l'hyperbole section du miroir. Ce miroir est constitué par un cylindre hyperbolique de 30 cm de haut, son diamètre est de 150 cm. La distance BC est de 50 cm. La distance AO, de 325 cm (*fig.* 32).

La dimension transversale du miroir nous est imposée par la nécessité d'illuminer Ox sur 3 m. L'approximation de l'optique géométrique nous est là très utile; en effet, au delà du dernier rayon optique possible issu de C et réfléchi sur R à savoir BD, le champ rayonné tombe très rapidement à une valeur nulle.

Cela posé, la figure 33 représente la surface S telle qu'on la mesure à la distance de 325 cm. Des

échelles dans le rapport 10 ont été choisies en abscisse et en ordonnée. Nous voyons que le déphasage total à rattraper pour avoir une onde plane est

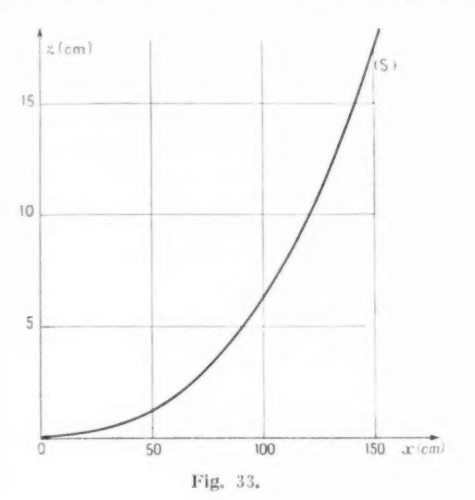


Fig. 33.

de 4π. Nous construisons donc une lentille à six plaques comprenant un élément central et un échelon, chacun rattrapant 2π. En partant du centre, la lentille centrale occupe 100 cm, l'échelon 50 cm. L'entraxe des trous est choisi égal à 65 mm, le diamètre varie de 62 mm à 40 mm, suivant l'abscisse x des centres. Les dimensions totales de la lentille sont de 3 m suivant Ox, 50 cm suivant Oy. L'écartement des plaques est 25 mm, leur épaisseur 2 mm.

La figure 34 représente différentes surfaces d'ondes S' transmises par la lentille pour différentes modifications. Les échelles choisies pour la figure 34 sont les mêmes que pour la figure 33. La courbe n° 1 correspond à la lentille de six plaques, elle nous montre que cette lentille est trop convergente. Nous avons donc retiré une plaque, ce qui nous donne la courbe n° 2. La lentille centrale est alors satisfaisante, mais l'échelon nous donne une onde en avance sur celle fournie par la lentille centrale. Retirons une plaque à l'échelon. La lentille est alors constituée de cinq plaques à la lentille centrale, quatre à l'échelon. On obtient la courbe n° 3. On améliore ce dernier résultat en inclinant l'ensemble de la lentille sur Oz. On évite ainsi une incidente trop oblique de l'onde occasionnant les effets décrits au chapitre précédent. D'où la courbe 4.

La lentille de six plaques avait été calculée pour une autre surface d'onde incidente, ce qui explique la courbe n° 1. Néanmoins, cette série d'expérience est intéressante, car elle nous montre directement le déphasage en fonction du nombre des plaques. Elle nous montre de plus que nous pouvons ajuster le déphasage dans une large mesure, et avec précision.

Une lentille peut, non seulement déphaser une onde sphérique, mais aussi *corriger localement* une

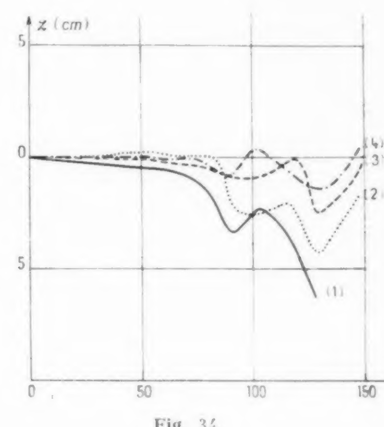


Fig. 34.

surface de phase et réduire ainsi des aberrations. C'est en quelque sorte le parallèle du dispositif optique connu sous le nom d'*Optique de Schmidt*.

Une vérification importante de la méthode employée a consisté à tracer le diagramme de l'aérien

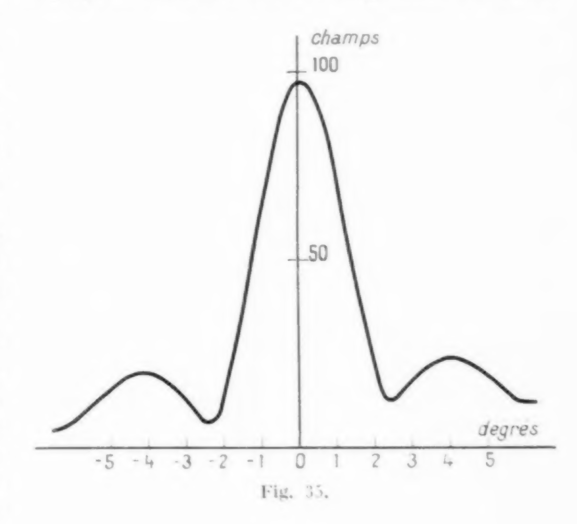


Fig. 35.

constitué par l'ensemble cornet réflecteur et lentille. Pour cela, on dispose un émetteur à une distance éloignée (800 m) et l'on note les champs reçus par le dispositif en fonction de l'angle que fait Oz avec la direction de l'émetteur. Les résultats obtenus sont décrits par la figure 35. On a porté en

ordonnée les indications en champs et en abscisse, les angles correspondant en degrés. Le « diagramme » ainsi obtenu correspond bien à celui que l'on calculerait à l'émission à partir de la phase et de l'amplitude mesurées précédemment.

Critique de la méthode de mesure. — On peut se demander à quelle distance de la lentille on doit opérer la mesure de la phase pour avoir les renseignements les plus intéressants. La mesure du champ dans les ouvertures même présenterait de l'intérêt, mais on est incapable de l'effectuer sans perturber le champ qu'on désire mesurer.

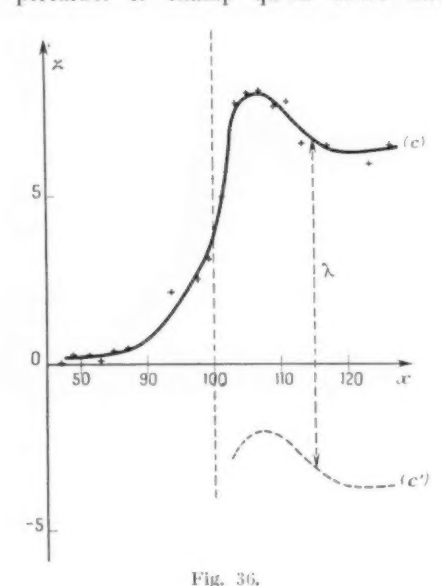


Fig. 36.

De même, si l'on se place près (mettons dans l'exemple choisi précédemment 5 à 10 cm), on observe en déplaçant l'antenne de réception R, (*fig.* 30) des variations rapides de l'amplitude dues à des ondes stationnaires. L'ouverture considérée comme une source et l'antenne R ne sont pas suffisamment découplées. L'expérience montre qu'on peut se mettre vers 30-40 cm (4 à 5 λ) et réduire cet inconvénient jusqu'à le rendre négligeable. D'autre part, dans le cas envisagé au chapitre III d'une plaque percée d'ouvertures égales, nous savons que la surface d'onde transmise devient rapidement régulière. On observe dans la mesure à une certaine distance de la plaque une plus grande régularité dans la surface d'onde que très près des ouvertures.

Que choisir maintenant pour antenne R ? Étant donné une ouverture de surface S illuminée constante en phase et en amplitude, son gain G par rapport à la source isotrope, est donné par la formule

$$G = \frac{4\pi S}{\lambda}. \qquad (V.1)$$

Dans le cas d'une antenne quelconque, le gain G est une notion première facilement mesurable. La formule (V.1) nous permet de définir une *surface apparente fictive*. On peut admettre qu'une antenne de gain G capte dans une onde plane incidente de longueur d'onde λ le flux d'énergie découpé par une surface S donnée par la formule (V.1). Cette surface est limitée au cas du doublet, par exemple à $1{,}5\lambda^2$. Ceci nous permet de fixer les idées sur le phénomène physique. Une antenne *intègre en quelque sorte l'énergie d'une surface. On ne peut espérer facilement mesurer le champ en un point précis.*

Cette impossibilité physique tient à la nature même des phénomènes de diffraction. Remarquons, par exemple, que si nous voulions utiliser un guide de petite dimension devant la longueur d'onde, donc une petite surface apparente S, nous ne pourrions recueillir d'énergie, le guide étant au-dessous de la fréquence de coupure. Nous avons donc intérêt à utiliser une antenne de faible gain. Néanmoins, on choisit une antenne de directivité plus élevée qu'un doublet, l'embouchure d'un guide d'onde par exemple.

Donnons un exemple d'une mesure d'une surface d'onde dans un endroit où la variation est rapide. Choisissons le passage de l'échelon à la lentille centrale, dans l'exemple précédent. L'antenne de mesure R intègre les résultats dans une distance approximative de $\frac{\lambda}{2}$ (4 cm). On obtient la courbe de la figure 36. Comme précédemment, l'échelle choisie en abscisse est dix fois plus grande qu'en ordonnée. La mesure est effectuée sur une lentille autre que la lentille de six plaques qui nous a servi dans l'exemple précédent. On voit la continuité de la surface de phase au passage à l'échelon. On peut penser que la courbe de phase vraie présente une variation plus rapide étant donné l'intégration des résultats effectués par l'antenne R sur 4 cm. La courbe C' est la portion de la courbe C correspondant à l'échelon, translatée de λ le long de Oz. On peut améliorer la planéité de C' et sa position relative par rapport à C, comme nous l'avons déjà fait dans l'exemple précédent. Toutefois, l'ordre de grandeur le long de Ox de la discontinuité introduite dans la courbe de phase par l'échelon ne peut être réduite à une valeur inférieure à $\frac{\lambda}{2}$ approximativement.

Remarque. — L'idée qu'on ne peut obtenir facilement des renseignements ponctuels sur un champ est une idée importante. *Cette sorte de* quantification *du champ se retrouve partout à l'échelle de la longueur d'onde.* On ne peut, par exemple, définir une image ponctuelle devant λ. En effet, si nous partons d'une image optique qui semble ponctuelle et que nous augmentons la longueur d'onde, nous voyons apparaître autour du point un *volume de diffraction* dont les dimensions sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde [30]. A l'inverse, il n'existe pas d'objet ou de source ponctuelle à l'échelle de la longueur d'onde. Dans un doublet, par exemple, on distingue deux régions délimitées par une sphère de rayon $\frac{\lambda}{2\pi}$. A l'intérieur de cette sphère, les champs électriques et magnétiques sont presque en quadrature, l'énergie se trouve en majeure partie sous forme réactive ; à l'extérieur, au contraire, les champs sont presque en phase, l'énergie se propage.

Remarquons que la lentille elle-même est en quelque sorte « quantifiée » à l'échelle de la longueur d'onde, l'unité de quantification est la mesure a du côté du guide virtuel G, la distance des centres des deux ouvertures voisines. *Si nous cherchons* à réduire $\frac{2a}{\lambda}$ au-dessous d'une valeur voisine de $\frac{1}{2}$, nous sommes en présence de ce que nous avons nommé la pseudo coupure, le coefficient de transmission d'une plaque diminue brutalement. On ne gagnerait rien à réduire a.

Il est toujours possible de mesurer le champ en un point précis, par exemple un champ dû à une onde de 50 c : s, mais alors le rendement de l'antenne est très mauvais. On ne capte qu'une très faible partie du flux d'énergie. Si l'on préfère, la composante réactive devient très grande devant la composante active. Ce n'est que lorsque les dimensions de l'antenne deviennent de l'ordre de la longueur d'onde qu'on peut espérer rendre comparables composantes actives et réactives.

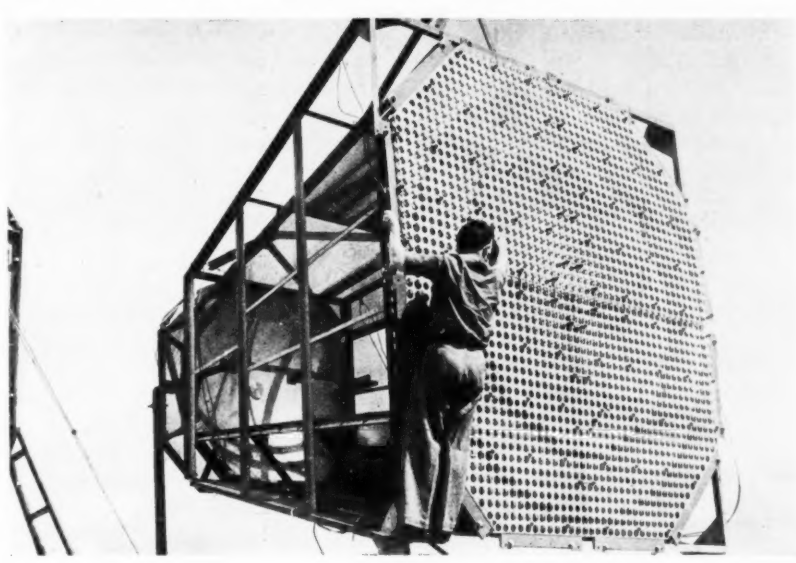


Fig. 37.

L'aérien du câble hertzien Paris-Lille.

Les aériens (1) du câble hertzien Paris-Lille, construits par le Compagnie Générale de T.S.F. pour l'Administration des P.T.T., sont destinés à équiper des relais hertziens distants d'une cinquantaine de kilomètres. On désire évidemment avoir l'atténuation la plus faible possible entre un aérien d'émission et un aérien de réception. Ceci impose donc d'avoir un gain le plus élevé possible, ou encore, ce qui est équivalent, de projeter l'énergie suivant des diagrammes de rayonnement les plus fins possibles. Une autre considération importante est d'avoir le minimum d'énergie réfléchie, de façon à ne pas réagir sur la source d'émission. On demande une adaptation très bonne de l'aérien sur le guide d'onde (moins de 1/400e, de l'énergie réfléchie).

(1) Pour une théorie et une vue générale des aériens hyperfréquences *voir par exemple Microwave Antenna, Theory and Design* (*Silver*), de la série du M.I.T. (Mc Graw Hill, édit.).

Enfin, on exige que l'aérien ne présente que des lobes secondaires faibles (inférieurs de 20 db au lobe principal) et soit exempt de rayonnement arrière.

Toutes ces conditions doivent être remplies par un aérien dont les dimensions n'excèdent pas 3 m × 3 m × 3 m, pour une fréquence centrale de 3 640 Mc et dans une bande de fréquence de 160 Mc.

L'aérien qui répond à ces conditions a été construit d'après les résultats obtenus sur la maquette à deux dimensions décrite dans l'exemple précédent. La figure 37 en est une reproduction photographique. Pour éviter un rayonnement arrière éventuel, un blindage en treillis métallique de la forme d'un tronc de pyramide *P* joint les bords du « réflecteur-oculaire » *R* aux bords de la « lentille objectif » *L*. Son adjonction modifie d'ailleurs légèrement la surface d'onde incidente sur la lentille *L*.

On distingue sur la figure 37 le guide d'onde amenant l'énergie U.H.F. à un cornet qui illumine le réfecteur R. En adoptant le langage optique, les deux « pupilles » de sortie et d'entrée sont à l'émission la surface de la lentille et la section droite du guide.

On remarque enfin un disque sur R, destiné à corriger l'onde réfléchie par R dans le cornet.

Nous avons vu au chapitre IV que le coefficient de déphasage d'une plaque varie pour une incidence oblique, et varie plus pour une onde incidente dont le plan de polarisation est parallèle au plan d'incidence, que pour une onde dont le plan de polarisation est normal au plan d'incidence. Pour un empilage de plaques, ceci correspond aux notions d'Optique cristalline d'indice extraordinaire et d'indice ordinaire. La polarisation (champ électrique) de l'aérien étant verticale, nous avons bombé la lentille *L* en forme de cylindre a génératrices horizontales. Ceci afin de réduire l'effet d'indice extraordinaire. Le rayon de courbure a été choisi de façon que les vecteurs électriques de l'onde incidente et de l'onde transmise soient également inclinés sur la lentille *L*.

Signalons une très légère polarisation elliptique dans les régions diagonales extrêmes. Cet effet s'explique facilement par le fait qu'alors le plan de polarisation de l'onde incidente ne coïncide plus avec le plan d'incidence ou n'est plus normal à ce dernier (Chap. IV). On retrouve curieusement un effet analogue obtenu sur les aériens à réflecteur, le défaut de « cross-polarisation » [31], p. 419.

Résultats obtenus.

Le déphasage obtenu grâce à la lentille est une justification intéressante de l'exactitude des vues théoriques et de la précision des mesures du chapitre III. Seules de faibles corrections ont été faites sur les plans de l'aérien primitif. Elles l'ont été de façon à obtenir à la sortie de la lentille une surface de phase aussi plane que possible. On a pu, mis à part la région de l'échelon, obtenir que cette planéité soit respectée sur toute la surface de la lentille (un cercle de diamètre 3 m) avec des écarts extrêmes autour de la valeur moyenne de ± 1 cm.

Ceci a permis de relever des diagrammes de rayonnement (*fig.* 38) qui sont très voisins des diagrammes théoriques qu'on calcule en supposant une phase constante et l'illumination relevée expérimentalement (sensiblement sinusoïdale). On remarque que l'ouverture totale à demi-puissance est 1°35′, les premiers zéros sont à +2° et —2°. Les premières feuilles secondaires sont de l'ordre de 20 db. Les autres sont beaucoup plus faibles.

Leur mesure a été effectuée dans des conditions assez moyennes, l'antenne n'étant pas suffisamment dégagée d'obstacles environnants. Elle nous a donné des feuilles latérales décroissant régulièrement de 0 à 180°. De — 45° à + 45°, le diagramme est remarquablement symétrique par rapport à l'axe de l'aérien. De 45° à 90°, l'ordre de grandeur des feuilles est de 40 db par rapport au faisceau central. Après 90°, on peut observer un rayonnement de l'ordre de 50 db. Nous pensons que ce rayonnement arrière serait inférieur à 50 db pour un aérien bien dégagé, en haut d'une tour, par exemple.

Remarquons que nous évitons avec ce dispositif les feuilles latérales signalées avec les lentilles guides.

Le rendement énergétique d'un aérien s'évalue par la notion de gain, c'est-à-dire le rapport de la puissance reçu en un point éloigné lorsqu'on utilise au mieux l'aérien à la puissance reçue avec un rayonnement isotrope de la même source. Ce gain est proportionnel à la surface de la plus grande « pupille » de l'aérien. La réciprocité des aériens à l'émission et à la réception permet la mesure du gain dans l'un ou l'autre cas. Nous avons effectué les mesures à la réception, en comparant les puissances respectivement reçues dans les mêmes conditions par l'aérien considéré et un aérien étalon. Pour aérien étalon nous prenons un cornet pyramidal de base carrée de 50×50 cm et de hauteur 120 cm (ceci pour des longueurs d'ondes voisines de 8,20 cm). La mesure des puissances reçues dans les deux cas nous donne des puissances, donc des gains dans le rapport des surfaces d'entrée des deux aériens (7 m² pour l'aérien à lentille, 1/4 m² pour le cornet étalon). C'est-à-dire que le ***rendement relatif*** de l'aérien à lentille est le même que celui du cornet étalon. Ce résultat, très

intéressant, ne peut être obtenu avec les aériens usuels de mêmes dimensions. Il est en effet bien connu expérimentalement (par ex. [31] p. 435) que le de phase et que permet de réaliser la lentille en hyperfréquence, comme le ferait une optique de Schmidt en Optique classique.

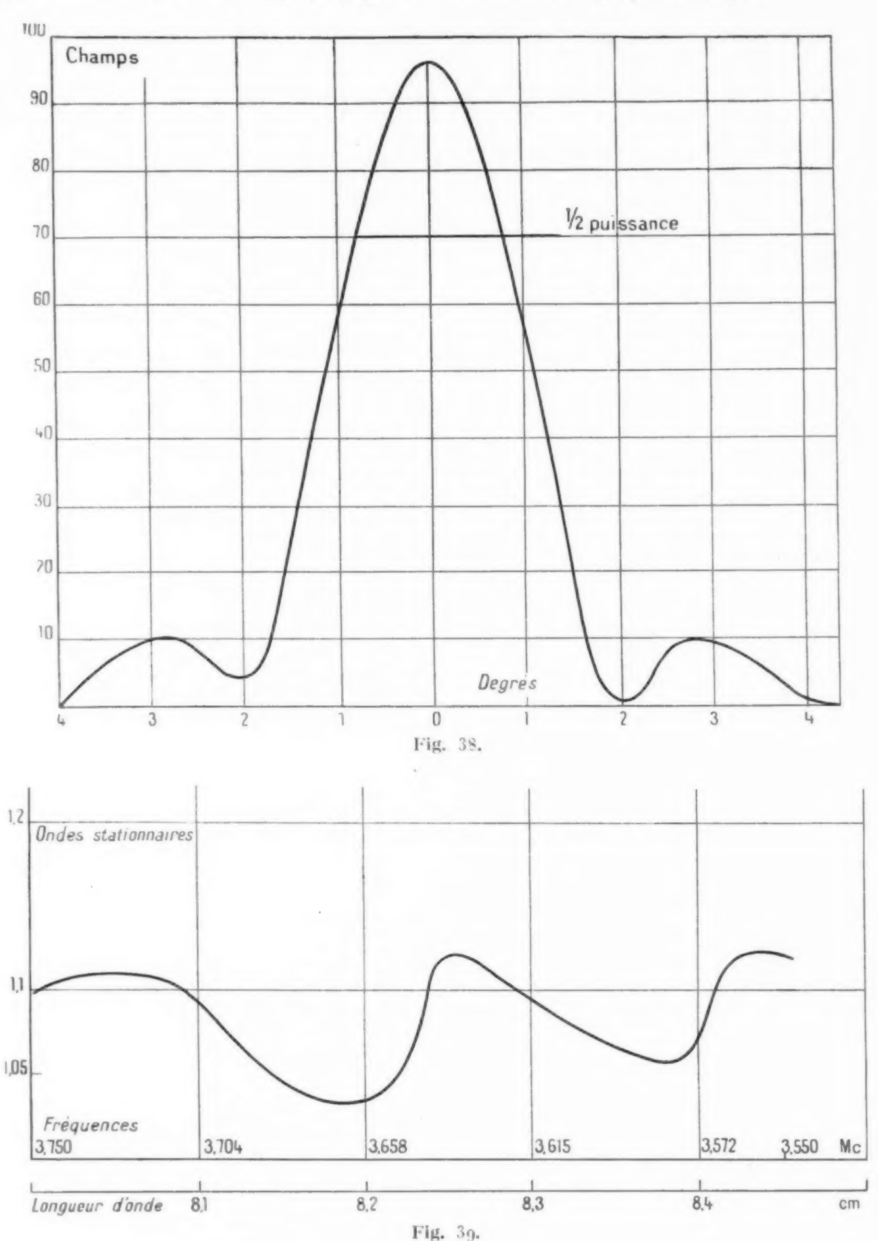


Fig. 38.

Fig. 39.

gain relatif des aériens diminue lorsque les dimensions augmentent par rapport à la longueur d'onde.

Cette qualité de l'aérien est due essentiellement au soin qui a été porté à la correction des aberrations

L'adaptation de l'aérien au guide d'onde a été obtenue dans une large bande. On l'évalue en mesurant les ondes stationnaires dans le guide que l'on aperçoit sur la figure 37. Un résultat de la mesure

est donné par la figure 39. Sur cette figure, on voit que le taux d'ondes stationnaires reste inférieur à 1,12 dans une bande de fréquence de l'ordre de 200 Mc (fréquence centrale 3 640 Mc). Cette qualité d'adaptation dans une large bande présente également un gros intérêt pour un aérien hyperfréquence. Elle permet, par exemple, le branchement de filtres ou de sources d'énergie sans découplage.

En conclsuion, l'existence de lentilles de ce type ouvre de nouvelles possibilités dans le domaine des aériens hyperfréquences. Du point de vue construction, leur fabrication et leur mise en place n'imposent que des tolérances larges. D'ailleurs, contrairement aux réflecteurs, une déformation mécanique change peu leurs propriétés (les lentilles agissent évidemment par transmission). Ceci permet d'envisager leur extension aux aériens d'ondes millimétriques. Du point de vue des résultats, ces lentilles permettent de corriger différentes aberrations et de perfectionner les aériens en les rendant composés comme les instruments d'optique. Ainsi, on évite certains défauts des aériens actuels, tout en améliorant leurs qualités de façon très intéressante, surtout pour les aériens de grandes dimensions.

Ce travail a été exécuté au Laboratoire de Recherches Générales de la Compagnie générale de T. S. F. sous la direction de M. H. Gutton. C'est de lui que vient l'idée première de cette étude dont il a été constamment le guide. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude. Je dois remercier vivement la Direction de la Compagnie générale de T. S. F., en particulier M. Ponte, et également le S. R. C. T. de l'Administration des P. T. T., en particulier M. Marzin et M. Sueur, pour leur confiance dans le résultat, les délais et les moyens accordés, qui ont permis la réalisation et l'étude de l'aérien. Je dois beaucoup aux échanges de vues avec les ingénieurs de ce Laboratoire et aux conseils de M. Ortusi, ainsi qu'au très bon travail d'équipe de M. Biggi et des collaborateurs qui ont participé au projet. Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance à M. le Professeur Y. Rocard pour sa bienveillance, ses remarques sur ce travail et l'intérêt qu'il y a porté.

BIBLIOGRAPHIE.

1. Stratton, *Electromagnetic theory*, p. 487.
2. Vasseur, *Thèse de Physique*, non publiée.
3. Bethe, *Theory of diffraction by small holes* (*Phys. Rev.*, t. 66, 1944, p. 163-182).
4. Moullin, *Radio aerials* (Oxford Clarendon Press. p. 429).
5. P. S. Epstein (*Diss, Munich*, 1914).
6. P. Morse et P. Rubenstein, *The diffraction of waves by ribbons and by slits* (*Phys. Rev.*, vol. 54, 1938, p. 895-897).
7. C. Bouwkamp, *On the Bethe's theory of diffraction by small holes* (*Phil. Res. Rep.*, vol. 5, 1950, p. 321-332).
8. Sommerfeld, *Die frei schwingende Kolbenmenbran* (*Ann. Phys.*, vol. 389, 1942).
9. Larmor, *Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. 1, 1903, p. 1-13).
10. Tedone, *Rendiconti dei Lincei*, vol. 26, 1917, p. 286-289.
11. Kottler, *Ann. Phys.*, vol. 71, 1923, p. 457-508,
12. L. de Broglie, *Problèmes de propagation guidées des ondes électro-magnétique*, Gauthier-Villars, p. 98.)
13. L. de Broglie, *Problèmes de propagation guidées des ondes électro-magnétiques* (Gauthier-Villars, p. 100).
14. Stratton et Chu, *Diffraction theory of electromagnetic waves* (*Phys. Rev.*, vol. 56, 1939, p. 99-107).
15. Copson, *On an integral equation arising in the theory of diffraction problems* (*Quart. J. Math. Oxford Soc.*, vol. 17, 1946, p. 19).
16. Copson, *An integral equation method of solving plane diffraction problems* (*Proc. Roy. Soc. London*, série A, vol. 176, 1946, p. 100).
17. Meixner, *Die Kantenbedingung in der Theorie der Beugung electromagnetischen Wellen an volkommen leitunden ebenen Schirmen* (*Ann. Phys.*, vol. 6, 1949, p. 1-9).
18. Levine et Schwinger, *Phys. Rev.*, vol. 74, no 8, 1948, p. 958-974 et *Phys. Rev.*, vol. 75, no 9, 1949, p. 1423-1432.
19. Baker et Copson, *The mathematical theory of Huyghens principle* (Oxford, p. 186).
20. Bruhat, *Cours d'optique* (Masson, édit.).
21. J. Ortusi, *Définition et mesure des coefficients de réflexion dans les guides* (*Annales de Radioélectricité*, no 8, 1947, p. 173).
22. J. Brown, *The design of metallic delay dielectric* (*Proc. of I.E.E.*, part. III, vol. 97, p. 45).
23. S. B. Cohn, *Analyse of the metallic strip delay sructure for microwave lenses* (*J.A.P.*, vol. 20, 1949, p. 257).

24. J. W. Miles, *Diffraction of a plane wave through a grating* (*Quart. Appl. Math.*, vol. 7, 1949, p. 45-64).

25. L. Brillouin, *Propagation d'ondes électromagnétiques dans un tuyau* (*Rev. Gén. Electr.*, vol. 40, nº 8, 1936, p. 227).

26. W. E. Kock, *B. S. T. J.*, 1948.

27. J. C. Simon, *Les lois de Fresnel en ondes centimétriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 1386-1388).

28. Ch. Mauguin, *J. Phys. Rad.*, série 7, 1936, p. 233.

29. J. Ortusi et G. Boissinot, *Les guides à fente et leurs applications aux aériens* (*Annales de Radioélectricité*, t. 5, nº 22, 1950, p. 310).

30. J. Ortusi et J. C. Simon, *Diffraction des paraboloïdes de révolution* (*Annales de Radioélectricité*, t. 5, nº 22, 1950, p. 332).

31. Silver, *Microwave antenna theory and design*, serie du M. I. T. (Mac Graw Hill, édit.).

32. Montgomery, *Microwave Measurements*, serie du M. I. T. (Mac Graw Hill, édit.).

UNE THÉORIE DE LA LENTILLE ÉLECTROSTATIQUE INDÉPENDANTE A SYMÉTRIE DE RÉVOLUTION PERTURBÉE.

PAR ÉDOUARD REGENSTREIF,

Docteur ès Sciences,
Ingénieur E.S.E.

SOMMAIRE. — *Après avoir intégré les équations régissant la marche des trajectoires de Gauss dans la lentille elliptique, l'auteur établit des formules explicites donnant directement les propriétés optiques fondamentales de la lentille elliptique en fonction de sa structure géométrique et électrique* (C.D.U. 621.385.833).

SUMMARY. — *Having integrated the Gaussian ray-equations for the elliptical lens, the author establishes explicit formulae for the fundamental optical properties of the elliptical lens in terms of its geometrical and electrical structure* (U.D.C. 621.385.833).

DONNÉES PRÉLIMINAIRES.

1. Introduction.

La théorie de la lentille perturbée a déjà fait l'objet d'un certain nombre de recherches [1, 2, 3, 4, 5] qui ont mis en évidence l'extrême sensibilité du pouvoir résolvant de l'objectif électronique par rapport aux écarts à la symétrie de révolution. Cependant, on n'était pas encore parvenu à établir des formules finies et explicites, donnant directement les propriétés optiques fondamentales de la lentille électrostatique perturbée en fonction de sa structure géométrique et électrique. Le but de ce travail est de fournir des relations explicites pour les caractéristiques optiques de la lentille elliptique et de préciser les conditions de fonctionnement optima. Les résultats pourront être appliqués non seulement à la lentille classique du microscope électronique, mais aussi aux systèmes correcteurs d'aberration sphérique qui fonctionnent en symétrie de révolution perturbée (lentille cylindrique au sens optique) [6].

Nous commencerons par un bref rappel des résultats acquis dans la théorie de la lentille ronde [7]. Nous envisagerons ensuite le problème de la répartition du potentiel sur l'axe et en dehors de l'axe de la lentille électrostatique à électrode centrale elliptique. Moyennant certaines hypothèses simplificatrices, nous intégrerons les équations différentielles qui régissent les trajectoires gaussiennes dans le champ elliptique et à partir des expressions analytiques ainsi obtenues, nous établirons des formules explicites pour les principaux paramètres optiques de la lentille perturbée. Nous étudierons enfin le comportement de la lentille elliptique en fonction de sa structure électrique et géométrique.

Seule la lentille à électrodes minces sera envisagée ici.

2. Bases du calcul.

Considérons une lentille électrostatique indépendante, formée de trois électrodes planes, minces, parallèles et percées de trous rigoureusement circulaires et coaxiaux. L'axe de symétrie du système est pris comme axe des abscisses z, l'axe des ordonnées r coïncidant avec la trace de l'électrode centrale. Soit z_0 la distance entre électrodes extérieures et électrode centrale, R_1 et R_2 les rayons des trous des électrodes, V_1 le potentiel de l'électrode centrale, V_2 le potentiel des électrodes extérieures et r_0 la distance à l'axe du rayon incident, initialement parallèle à l'axe.

On a les relations suivantes [7] :

Potentiel au centre de la lentille

$$\Phi(o) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{1 + \frac{z_0}{R_1} \operatorname{arc\,tg} \frac{z_0}{R_1}}. \tag{1}$$

Potentiel à l'aplomb des électrodes extérieures

$$\Phi(z_0) = V_1 + (V_2 - V_1)\left[1 - \frac{\dfrac{R_2}{2R_1}}{1 + \dfrac{z_0}{R_1}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{z_0}{R_1}}\right]. \tag{2}$$

Le paramètre fondamental $x = \dfrac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)}$ dépend en général des rapports $\dfrac{V_1}{V_2}$, $\dfrac{z_0}{R_1}$ et (dans une faible mesure) $\dfrac{R_2}{R_1}$. En régime unipotentiel et lorsque $z_0 \geq 3R_1$ et $R_2 \geq \pi z_0$, on a

$$x_0 = \frac{2}{\pi}\,\frac{R_1}{z_0}. \tag{3}$$

Les deux points d'inflexion de la courbe du potentiel sur l'axe, définis par $z = kz_0$ $\left(\text{pratiquement } k \simeq \frac{2}{3}\right)$, partagent la lentille en trois régions, où l'on peut écrire sensiblement) :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Région d'incidence :} & \\ \Phi(z) = \Phi(z_0) + q(z + z_0)^2, & -z_0 < z < -kz_0; \\ \text{Région centrale :} & \\ \Phi(z) = \Phi(0) + pz^2, & -kz_0 < z < kz_0; \\ \text{Région d'émergence :} & \\ \Phi(z) = \Phi(z_0) + q(z - z_0)^2. & kz_0 < z < z_0, \end{array}\right. \tag{4}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} p = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2}, \\ q = \dfrac{1}{k-1}\,\dfrac{\Phi(z_0) - \Phi(0)}{z_0^2}. \end{array}\right. \tag{5}$$

Il en résulte pour le rayon gaussien :

$$\left\{\begin{array}{l} r = r_0 \operatorname{ch}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\beta(z + z_0)\right] \\ \qquad \text{dans la région d'incidence,} \\ r = A\cos\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,sh}\alpha z - \varphi\right] \\ \qquad \text{dans la région centrale,} \\ r = BF\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\beta(z - z_0) - \psi\right] \\ \qquad \text{dans la région d'émergence,} \end{array}\right. \tag{6}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{1}{z_0}\sqrt{\dfrac{1}{k}\,\dfrac{1-x}{x}}, \\ \beta = \dfrac{1}{z_0}\sqrt{\dfrac{1}{1-k}(1-x)}. \end{array}\right. \tag{7}$$

Posons encore

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,sh}\alpha k z_0, & \lambda = \sqrt{\dfrac{k}{1-k}}; \\ \beta_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\beta(1-k)z_0. & K = \dfrac{1}{\lambda}\operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi). \end{array}\right. \tag{8}$$

Les coefficients A, B, φ et ψ déterminant la trajectoire de Gauss sont alors donnés par

$$\left\{\begin{array}{l} A^2 = r_0^2(\operatorname{ch}^2\beta_0 + \lambda^2\operatorname{sh}^2\beta_0), \\ \varphi = \operatorname{arc\,tg}\lambda\operatorname{th}\beta_0 - \alpha_0 \end{array}\right. \tag{9}$$

et, suivant les valeurs de K,

$$\left\{\begin{array}{l} |K| < 1, \\ B^2 = A^2\left[\cos^2(\alpha_0 - \varphi) - \dfrac{1}{\lambda^2}\sin^2(\alpha_0 - \varphi)\right], \\ \psi = \operatorname{arc\,th}\dfrac{1}{\lambda}\operatorname{tg}(\alpha_0 - \varphi) - \beta_0, \\ F = \operatorname{ch}; \end{array}\right. \tag{10_1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} |K| > 1. \\ B^2 = A^2\left[\dfrac{1}{\lambda^2}\sin^2(\alpha_0 - \varphi) - \cos^2(\alpha_0 - \varphi)\right], \\ \psi = \operatorname{arc\,th}\lambda\cot(\alpha_0 - \varphi) - \beta_0, \\ F = \operatorname{sh}. \end{array}\right. \tag{10_2}$$

La distance focale gaussienne est donnée par

$$\frac{1}{f} = \frac{\beta}{\lambda\sqrt{2}}(\operatorname{ch}^2\beta_0 + \lambda^2\operatorname{sh}^2\beta_0)\sin 2(\alpha_0 - \gamma_0). \tag{11}$$

où

$$\operatorname{tg}\gamma_0 = \lambda\operatorname{th}\beta_0. \tag{12}$$

La distance focale est minimum $\left(\text{avec } k = \frac{2}{3}\right)$ pour $x = 0{,}058$. Ce minimum a pour valeur $f_{\min} = 0{,}77\ z_0$.

L'abscisse du foyer gaussien a pour expression

$$\frac{z_F}{z_0} = 1 + \frac{f}{2\lambda z_0}\sqrt{4\lambda^2 + (\lambda^2 + 1)^2\operatorname{sh}^2 2\beta_0} \times \sin 2(\alpha_0 + \delta_0), \tag{13}$$

où

$$\operatorname{tg} 2\delta_0 = \frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1}\,\frac{1}{\operatorname{th} 2\beta_0}. \tag{14}$$

Les figures 1 et 2 montrent la variation de la distance focale et de l'abscisse du foyer en fonction de x.

Nous allons essayer maintenant d'établir la théorie de la lentille elliptique à partir des résultats acquis pour la lentille ronde.

3. Répartition du potentiel dans la lentille elliptique.

Soient (*fig.* 3) $2R_{1\max}$ et $2R_{1\min}$ les axes de l'ellipse

formée par le trou central de la lentille. Le rayon moyen du trou sera

$$R_1 = \frac{R_{1\max} + R_{1\min}}{2}. \tag{15}$$

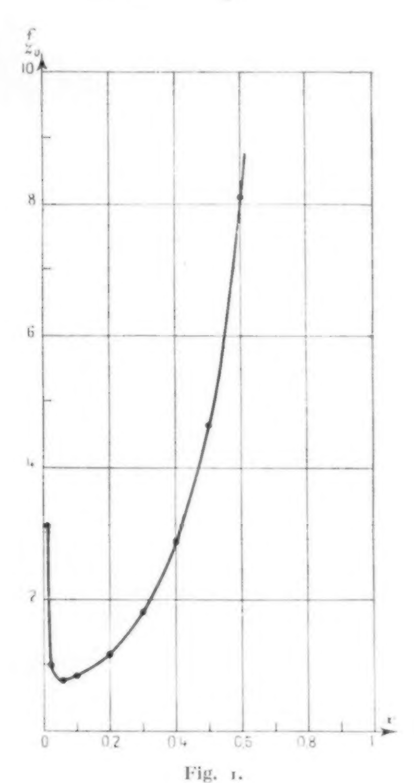


Fig. 1.

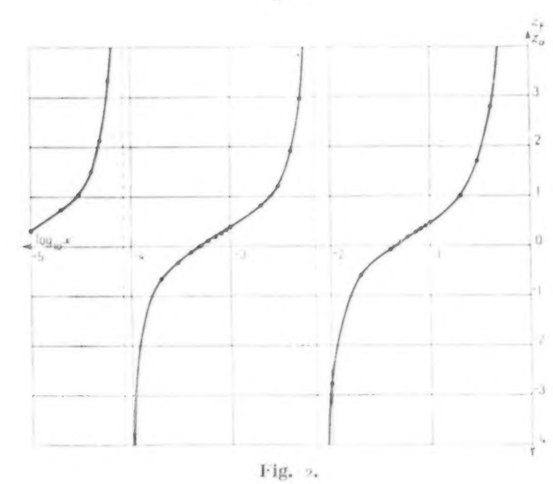


Fig. 2.

Nous définirons l'écart à la symétrie de révolution par

$$\Delta R_1 = R_{1\max} - R_1 = R_1 - R_{1\min} \tag{16}$$

et l'ellipticité relative par

$$\tau_1 = \frac{\Delta R_1}{R_1}. \tag{17}$$

τ_1 sera une quantité très faible (10^{-1} à 10^{-2}) et toujours positive.

La position d'un point sera définie indifféremment

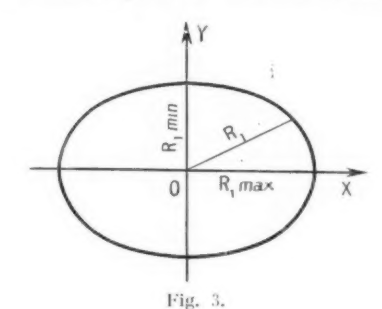


Fig. 3.

par ses coordonnées cartésiennes OX, OY ou par ses coordonnées cylindriques r, θ, z, la droite OX et l'origine des azimuts coïncidant avec le grand axe de l'ellipse formée par le trou central de la lentille.

Soit $\Phi(z)$, le potentiel sur l'axe de la lentille ronde de rayon central R_1. Le potentiel en un point z, r situé en dehors de l'axe, sera, en négligeant les termes d'ordre quatre ou supérieur en r,

$$\boxed{\varphi(z, r) = \Phi(z) - \frac{r^2}{4}\Phi''(z).} \tag{18}$$

Si la lentille est affectée maintenant d'une ellipticité τ_1, le potentiel en dehors de l'axe sera [8]

$$\boxed{\varphi(z, r, \theta) = \Phi(z) - \frac{r^2}{4}\Phi''(z)\,[1 - \varepsilon(z)\cos 2\theta],} \tag{19}$$

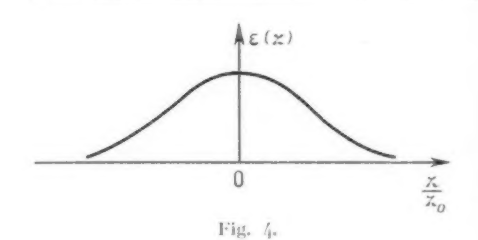


Fig. 4.

$\Phi(z)$ étant toujours le potentiel sur l'axe de la lentille ronde de rayon R_1.

La fonction $\varepsilon(z)$ a été étudiée par M. Cotte [9] et surtout par F. Bertein [1]. La figure 4 montre l'allure de cette fonction. On voit que c'est seulement dans la région centrale que $\varepsilon(z)$ prend des valeurs importantes. Or, dans les calculs que nous

avons effectués précédemment, nous avons supposé que $\Phi''(z)$ était constant dans la région centrale et égal à $2p(p > 0)$, et encore constant dans les régions d'incidence et d'émergence, où sa valeur était $2q(q < 0)$. Ce procédé nous a fourni de bons résultats non seulement dans l'établissement des trajectoires gaussiennes, mais aussi dans l'étude des rayons transgaussiens. Nous allons donc faire une hypothèse du même genre pour $\varepsilon(z)$. Dans la région centrale, nous remplacerons $\varepsilon(z)$ par la valeur que prend cette fonction dans le plan de symétrie de la lentille. On a alors [8] $\varepsilon(z) = \varepsilon(0) = \eta = \text{const.}$ Dans les régions d'incidence et d'émergence nous poserons $\varepsilon(z) = 0$. En effet, la marche de la trajectoire dans ces régions est très peu influencée par une modification de la structure de la lentille. Le paramètre x qui synthétise les deux composantes géométrique et électrique peut varier dans des proportions notables sans que la trajectoire en soit affectée dans les deux régions extrêmes de la lentille. *A fortiori* l'influence de $\varepsilon(z)$ qui est supposé faible sera tout à fait négligeable dans ces régions. Par contre, il est indispensable de représenter correctement $\varepsilon(z)$ au voisinage de $z = 0$, où la trajectoire est très sensible à toute variation des paramètres géométriques et électriques.

En résumé, nous poserons

$$(20)\quad \begin{cases} \varepsilon = 0 & \text{pour} \quad -z_0 < z < -kz_0, \\ \varepsilon = \text{const.} = \eta & \text{pour} \quad -kz_0 < z < kz_0, \\ \varepsilon = 0 & \text{pour} \quad kz_0 < z < z_0. \end{cases}$$

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES TRAJECTOIRES GAUSSIENNES DANS LA LENTILLE ELLIPTIQUE.

4. Établissement des équations.

Les équations générales du mouvement de l'électron dans un champ électrique dérivant d'un potentiel $\varphi(r, z, \theta)$ s'écrivent en coordonnées cylindriques

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{m}{e}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}, \\ \dfrac{m}{e}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \\ \dfrac{m}{e}\ddot{z} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}, \end{cases}$$

un point indiquant une dérivation par rapport au temps. Au système (21) on peut ajouter l'équation des forces vives $\frac{1}{2}mv^2 = e\varphi$ qui s'écrit dans l'approximation de Gauss

$$(22)\quad \frac{m}{e}\dot{z}^2 = 2\Phi(z).$$

Nous allons d'abord transformer le système (21) de manière à éliminer le temps et à faire jouer à z le rôle de variable indépendante. On a, les dérivations en z étant notées par des accents prime et seconde,

$$(23)\quad \begin{cases} \dot{r} = r'\dot{z}, & \ddot{r} = r''\dot{z}^2 + r'\ddot{z}; \\ \dot{\theta} = \theta'\dot{z}, & \ddot{\theta} = \theta''\dot{z}^2 + \theta'\ddot{z}. \end{cases}$$

Les deux premières équations du système (21) deviennent alors

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{m}{e}[(r'' - r\theta'^2)\dot{z}^2 + r'\ddot{z}] = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}, \\ \dfrac{m}{e}r[(2r'\theta' + r\theta'')\dot{z}^2 + r\theta'\ddot{z}] = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \end{cases}$$

ou bien, en tenant compte de (21_3) et (22)

$$(25)\quad \begin{cases} 2\Phi(z)(r'' - r\theta'^2) + r'\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}, \\ 2\Phi(z)(2r'\theta' + r\theta'') = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} - r\theta'\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

D'autre part, la relation (19) fournit, pour ε constant

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial r} = -\dfrac{r}{2}\Phi''(z)(1 - \varepsilon\cos 2\theta), \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\dfrac{r}{2}\Phi''(z)\varepsilon\sin 2\theta, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \Phi'(z). \end{cases}$$

Les équations (25) s'écrivent donc finalement

$$(27)\quad \boxed{\begin{aligned} &\Phi(z)r'' + \frac{1}{2}\Phi'(z)r' + \frac{1}{4}\Phi''(z)r \\ &\qquad = \left[\frac{\varepsilon}{4}\Phi''(z)\cos 2\theta + \Phi(z)\theta'^2\right]r, \\ &r\Phi(z)\theta'' + \left[2r'\Phi(z) + \frac{r}{2}\Phi'(z)\right]\theta' \\ &\qquad - \frac{\varepsilon}{4}r\Phi''(z)\sin 2\theta = 0. \end{aligned}}$$

5. Emploi des coordonnées cartésiennes.

Dans certains cas, que nous discuterons plus loin, il est utile de recourir aux formes cartésiennes des trajectoires de Gauss.

On obtient les équations cartésiennes en projetant le mouvement de l'électron sur le trièdre de référence (OX, OY, Oz). On a alors, en désignant par r_X et r_Y les projections de la trajectoire sur les deux plans de symétrie

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{m}{e}\ddot{r}_X = \dfrac{\partial\varphi}{\partial X}, \\ \dfrac{m}{e}\ddot{r}_Y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial Y}, \\ \dfrac{m}{e}\ddot{z} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

Il en résulte

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{m}{e}(r_X''\dot{z}^2 + r_X'\ddot{z}) = \dfrac{\partial\omega}{\partial X}, \\ \dfrac{m}{e}(r_Y''\dot{z}^2 + r_Y'\ddot{z}) = \dfrac{\partial\omega}{\partial Y}. \end{cases}$$

ou bien, en vertu de (22)

$$(30)\quad \begin{cases} 2\Phi(z)r_X'' + \Phi'(z)r_X' = \dfrac{\partial\omega}{\partial X}, \\ 2\Phi(z)r_Y'' + \Phi'(z)r_Y' = \dfrac{\partial\omega}{\partial Y}. \end{cases}$$

Or,

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial X} = \dfrac{\partial\omega}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial X} + \dfrac{\partial\omega}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial X}, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial Y} = \dfrac{\partial\omega}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial Y} + \dfrac{\partial\omega}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial Y}, \end{cases}$$

et

$$(32)\quad \begin{cases} r^2 = r_X^2 + r_Y^2, \\ \theta = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{r_Y}{r_X}. \end{cases}$$

Il vient donc

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial X} = \dfrac{\partial\omega}{\partial r}\dfrac{r_X}{r} - \dfrac{\partial\omega}{\partial\theta}\dfrac{r_Y}{r^2}, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial Y} = \dfrac{\partial\omega}{\partial r}\dfrac{r_Y}{r} + \dfrac{\partial\omega}{\partial\theta}\dfrac{r_X}{r^2}. \end{cases}$$

En tenant compte des équations (26), le système (33) s'écrit finalement

$$(34)\quad \boxed{\begin{aligned} &\Phi(z)r_X'' + \tfrac{1}{2}\Phi'(z)r_X' + \tfrac{1}{4}\Phi''(z)(1-\varepsilon)r_X = 0, \\ &\Phi(z)r_Y'' + \tfrac{1}{2}\Phi'(z)r_Y' + \tfrac{1}{4}\Phi''(z)(1+\varepsilon)r_Y = 0. \end{aligned}}$$

6. Remarques au sujet des équations gaussiennes.

Les équations différentielles (27) et (34) définissent les trajectoires de Gauss en régime elliptique lorsqu'on admet que ε est constant.

Les équations (27) sont d'une application commode lorsqu'on veut étudier les solutions de la forme $\theta = \text{const.}$ ou plus généralement $\theta = f(z)$. Elles sont utiles également dans le cas où l'on définit le rayon incident par sa distance à l'axe r_0 et son méridien θ_0. Par contre, le système (34) s'avère avantageux lorsqu'on étudie les projections de la trajectoire sur les deux plans de symétrie.

Les équations (27) et (34) sont à rapprocher de l'équation différentielle

$$(35)\quad \Phi(z)r'' + \frac{1}{2}\Phi'(z)r' + \frac{1}{4}\Phi''(z)r = 0$$

qui donne la trajectoire de Gauss en symétrie axiale.

Remarquons encore une fois que dans toutes ces relations $\Phi(z)$ représente le potentiel sur l'axe de la lentille non perturbée.

Le système (27) permet de se faire immédiatement une idée qualitative de la marche du rayon de Gauss dans la lentille elliptique.

Si l'on considère un rayon initialement parallèle à l'axe, il cheminera dans la région d'incidence exactement comme dans une lentille ronde car ε est, par hypothèse, nul dans cette région. En particulier, l'électron restera constamment dans son méridien d'entrée θ_0.

Dans la région centrale, par contre, ε possède une valeur finie. Le rayon de Gauss subira alors une rotation autour de l'axe et quittera par conséquent son méridien initial.

Dans la région d'émergence, ε est à nouveau nul, mais à l'entrée dans cette région, la vitesse de l'électron n'est plus située dans un plan méridien. On aura donc affaire à une trajectoire gauche dans une lentille de révolution.

Une exception à la marche ainsi esquissée est constituée par les rayons situés initialement dans les deux plans de symétrie de la lentille. Ces trajectoires particulières chemineront constamment dans leurs plans.

Nous allons préciser toutes ces questions par le calcul.

7. Équations explicites.

Nous allons expliciter les équations (27) et (34) en y introduisant les valeurs particulières de ε et de $\Phi(z)$ dans les trois régions de la lentille.

a. Région d'incidence :

$$-z_0 < z < -kz_0.$$

On a ici $\varepsilon = 0$ et puisque la trajectoire est supposée parallèle à l'axe à l'entrée de la lentille

$$\theta(-z_0) = \theta_0, \qquad \theta'(-z_0) = 0.$$

En outre, on peut écrire, en vertu de (4)

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi(z_0) + q(z+z_0)^2, \\ \Phi'(z) &= 2q(z+z_0), \\ \Phi''(z) &= 2q. \end{aligned}$$

En tenant compte de (5) et (7), les équations (27) deviennent

$$(36)\quad \begin{cases} [1-\beta^2(z-z_0)^2]r'' - \beta^2(z-z_0)r' - \dfrac{\beta^2}{2}r = 0, \\ \theta = \theta_0 \end{cases}$$

soit, en coordonnées cartésiennes

$$(37)\quad \begin{cases} [1-\beta^2(z-z_0)^2]r''_X - \beta^2(z-z_0)r'_X - \dfrac{\beta^2}{2}r_X = 0, \\ [1-\beta^2(z-z_0)^2]r''_Y - \beta^2(z-z_0)r'_Y - \dfrac{\beta^2}{2}r_Y = 0, \end{cases}$$

b. Région centrale :

$$-kz_0 < z < kz_0.$$

On a dans cette région

$$\Phi(z) = \Phi(0) + pz^2,$$
$$\Phi'(z) = 2pz,$$
$$\Phi''(z) = 2p.$$

En tenant compte de (5) et (7) le système (27) s'écrit

$$(38)\quad \begin{cases} (1+\alpha^2 z^2)r'' + \alpha^2 z r' + \dfrac{\alpha^2}{2}r \\ \qquad = \left[\dfrac{\varepsilon\alpha^2}{2}\cos 2\theta + (1+\alpha^2 z^2)\theta'^2\right]r, \\ r(1+\alpha^2 z^2)\theta'' \\ \qquad + [2r'(1+\alpha^2 z^2) + \alpha^2 z r]\theta' + \dfrac{\varepsilon\alpha^2}{2}r\sin 2\theta = 0. \end{cases}$$

Le système (38) est équivalent aux deux équations cartésiennes

$$(39)\quad \begin{cases} (1+\alpha^2 z^2)r''_X + \alpha^2 z r'_X + \dfrac{\alpha^2}{2}(1-\varepsilon)r_X = 0, \\ (1+\alpha^2 z^2)r''_Y + \alpha^2 z r'_Y + \dfrac{\alpha^2}{2}(1+\varepsilon)r_Y = 0. \end{cases}$$

Rappelons qu'en symétrie axiale, les trajectoires de Gauss sont déterminées dans la région centrale de la lentille par l'équation

$$(40)\qquad (1+\alpha^2 z^2)r'' + \alpha^2 z r' + \frac{\alpha^2}{2}r = 0.$$

c. Région d'émergence :

$$kz_0 < z < z_0.$$

Le potentiel est défini ici par

$$\Phi(z) = \Phi(z_0) + q(z-z_0)^2,$$
$$\Phi'(z) = 2q(z-z_0),$$
$$\Phi''(z) = 2q.$$

Conformément à l'hypothèse initiale, ε est nul dans cette région et l'on aura affaire par conséquent à une lentille ronde. Les équations (38) montrent qu'en général $\theta'(kz_0) \neq 0$. Il en résulte que la trajectoire sera gauche, comme dans la région centrale de la lentille.

En explicitant le système (27), on trouve

$$(41)\quad \begin{cases} [1-\beta^2(z-z_0)^2]r'' - \beta^2(z-z_0)r' - \dfrac{\beta^2}{2}r \\ \qquad = [1-\beta^2(z-z_0)^2]\theta'^2 r, \\ r[1-\beta^2(z-z_0)^2]\theta'' \\ \qquad + \{2r'[1-\beta^2(z-z_0)^2] - \beta^2(z-z_0)\}\theta' = 0. \end{cases}$$

En coordonnées cartésiennes, on obtient encore le système (37) avec, bien entendu, des conditions initiales différentes.

Avant d'envisager les solutions de ces équations dans le cas général, nous localiserons l'étude dans les plans de symétrie de la lentille.

TRAJECTOIRES DANS LES PLANS DE SYMÉTRIE.

8. Expression analytique des trajectoires.

Cherchons les solutions de la forme $\theta = \text{const.}$ du système (38). Elles sont données par

$$\sin 2\theta = 0,$$

c'est-à-dire

$$(42)\qquad \theta = n\frac{\pi}{2}.$$

Les systèmes (36) et (41) sont évidemment satisfaits par ces solutions, c'est-à-dire les trajectoires qui restent planes dans la région centrale, le sont *a fortiori* dans les deux régions extrêmes de la lentille. Les relations précédentes montrent, d'autre part, que seules les trajectoires situées dans les plans de symétrie restent planes.

Par suite de la symétrie d'ordre deux du système, il suffit de considérer les deux cas $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. Nous désignerons par $r(0)$ et $r\left(\frac{\pi}{2}\right)$ les rayons cheminant dans les plans de symétrie de la lentille.

(38) ou (39) fournissent alors

$$(43)\quad \boxed{\begin{aligned} &(1+\alpha^2 z^2)\,r(0)'' + \alpha^2 z\, r(0)' + \frac{\alpha^2}{2}(1-\varepsilon)\,r(0) = 0, \\ &(1+\alpha^2 z^2)\,r\left(\frac{\pi}{2}\right)'' + \alpha^2 z\, r\left(\frac{\pi}{2}\right)' \\ &\qquad + \frac{\alpha^2}{2}(1+\varepsilon)\,r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}}$$

A l'aide du changement de variable $\alpha z = \operatorname{sh}\alpha\zeta$, on trouve pour les solutions de (43)

$$(44)\quad \boxed{\begin{aligned} r(0) &= A(0)\cos\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}\operatorname{arcsh}\alpha z - \varphi_X\right), \\ r\left(\frac{\pi}{2}\right) &= A\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}}\operatorname{arcsh}\alpha z - \varphi_Y\right). \end{aligned}}$$

On trouverait de la même manière les solutions dans les régions d'incidence et d'émergence à l'aide du changement de variable $\beta(z \pm z_0) = \sin \beta\xi$.

En résumé on a

$$
(45)\quad \begin{cases}
\text{Région d'incidence:} \\
r(0) = r\left(\frac{\pi}{2}\right) = r_0 \,\mathrm{ch}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z + z_0)\right]; \\
\text{Région centrale :} \\
r(0) = A(0) \cos\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}} \,\mathrm{arc\,sh}\, \alpha z - \varphi_X\right); \\
r\left(\frac{\pi}{2}\right) = A\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} \,\mathrm{arc\,sh}\, \alpha z - \varphi_Y\right); \\
\text{Région d'émergence :} \\
r(0) = B(0) \begin{matrix}\mathrm{ch} \\ \mathrm{sh}\end{matrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z - z_0) - \psi_X\right] \\
r\left(\frac{\pi}{2}\right) = B\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{matrix}\mathrm{ch} \\ \mathrm{sh}\end{matrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z - z_0) - \psi_Y\right]
\end{cases}
$$

Le système (45) est à rapprocher du système (6) donnant la marche du rayon gaussien dans la lentille ronde.

9. Coefficients des trajectoires.

Les constantes A, B, φ et ψ peuvent être déterminées à l'aide de considérations de continuité exposées antérieurement [7]. En posant

$$
(46_1)\quad \begin{cases}
\alpha_{0X} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}} \,\mathrm{arc\,sh}\, \alpha k z_0 = \sqrt{1-\varepsilon}\, \alpha_0, \\
\lambda_X = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \sqrt{\frac{k}{1-k}} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \lambda, \\
K_X = \frac{1}{\lambda_X} \mathrm{tg}(\alpha_{0X} - \varphi_X);
\end{cases}
$$

$$
(46_2)\quad \begin{cases}
\alpha_{0Y} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} \,\mathrm{arc\,sh}\, \alpha k z_0 = \sqrt{1+\varepsilon}\, \alpha_0, \\
\lambda_Y = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \sqrt{\frac{k}{1-k}} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \lambda, \\
K_Y = \frac{1}{\lambda_Y} \mathrm{tg}(\alpha_{0Y} - \varphi_Y);
\end{cases}
$$

on trouve

$$
(47_1)\quad \begin{cases}
A^2(0) = r_0^2(\mathrm{ch}^2 \beta_0 + \lambda_X^2 \,\mathrm{sh}^2 \beta_0), \\
\varphi_X = \mathrm{arc\,tg}\, \lambda_X \,\mathrm{th}\, \beta_0 - \alpha_{0X}; \\
|K_X| < 1, \\
B^2(0) = A^2(0)\left[\cos^2(\alpha_{0X} - \varphi_X) - \frac{1}{\lambda_X^2} \sin^2(\alpha_{0X} - \varphi_X)\right], \\
\psi_X = \mathrm{arc\,th}\, \frac{1}{\lambda_X} \mathrm{tg}(\alpha_{0X} - \varphi_X) - \beta_0, \\
r_{X\,\text{émerg}} = B(0)\, \mathrm{ch}[\quad]; \\
|K_X| > 1, \\
B^2(0) = A^2(0)\left[\frac{1}{\lambda_X^2} \sin^2(\alpha_{0X} - \varphi_X) - \cos^2(\alpha_{0X} - \varphi_X)\right], \\
\psi_X = \mathrm{arc\,th}\, \lambda_X \cot(\alpha_{0X} - \varphi_X) - \beta_0, \\
r_{X\,\text{émerg}} = B(0)\, \mathrm{sh}[\quad];
\end{cases}
$$

$$
(47_2)\quad \begin{cases}
A^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = r_0^2(\mathrm{ch}^2 \beta_0 + \lambda_Y^2 \,\mathrm{sh}^2 \beta_0), \\
\varphi_Y = \mathrm{arc\,tg}\, \lambda_Y \,\mathrm{th}\, \beta_0 - \alpha_{0Y}; \\
|K_Y| < 1, \\
B^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = A^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[\cos^2(\alpha_{0Y} - \varphi_Y) - \frac{1}{\lambda_Y^2} \sin^2(\alpha_{0Y} - \varphi_Y)\right], \\
\psi_Y = \mathrm{arc\,th}\, \frac{1}{\lambda_Y} \mathrm{th}(\alpha_{0Y} - \varphi_Y) - \beta_0, \\
r_{Y\,\text{émerg}} = B\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{ch}[\quad]; \\
|K_Y| > 1, \\
B^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = A^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{1}{\lambda_Y^2} \sin^2(\alpha_{0Y} - \varphi_Y) - \cos^2(\alpha_{0Y} - \varphi_Y)\right], \\
\psi_Y = \mathrm{arc\,th}\, \lambda_Y \cot(\alpha_{0Y} - \varphi_Y) - \beta_0, \\
r_{Y\,\text{émerg}} = B\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathrm{sh}[\quad].
\end{cases}
$$

Les relations (45), (46) et (47) définissent entièrement les rayons principaux de Gauss dans les plans de symétrie de la lentille elliptique. Elles permettent de calculer numériquement ces trajectoires en fonction du paramètre fondamental x et de l'ellipticité relative ε. Les expressions de α, β, α_0, β_0 et λ qui figurent dans ces relations sont celles définies pour la lentille ronde de rayon R_1. Remarquons que, par suite de la petitesse de ε, les rayons $r(0, \varepsilon, x)$ et $r\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon, x\right)$ suivront de près la trajectoire de la lentille ronde $r(x)$.

10. Étude des distances focales principales.

La relation (11) donnant la distance focale de la lentille peut être appliquée immédiatement aux deux plans de symétrie. On a

$$
(48)\quad \begin{cases}
\frac{1}{f_X} = \frac{\beta}{\lambda_X \sqrt{2}} (\mathrm{ch}^2 \beta_0 + \lambda_X^2 \,\mathrm{sh}^2 \beta_0) \sin 2(\alpha_{0X} - \gamma_{0X}), \\
\frac{1}{f_Y} = \frac{\beta}{\lambda_Y \sqrt{2}} (\mathrm{ch}^2 \beta_0 + \lambda_Y^2 \,\mathrm{sh}^2 \beta_0) \sin 2(\alpha_{0Y} - \gamma_{0Y}),
\end{cases}
$$

avec

$$
(49)\quad \begin{cases}
\mathrm{tg}\, \gamma_{0X} = \lambda_X \,\mathrm{th}\, \beta_0, \\
\mathrm{tg}\, \gamma_{0Y} = \lambda_Y \,\mathrm{th}\, \beta_0.
\end{cases}
$$

Par suite de la petitesse de ε, les courbes $f_X(\varepsilon, x)$ et $f_Y(\varepsilon, x)$ seront très voisines de la courbe $f(x)$ caractérisant la lentille ronde.

Le calcul de la différence $\Delta f = f_X - f_Y$ en série de ε est fait en appendice. On trouve

$$
(50)\quad \frac{\Delta f}{f^2} = \frac{\beta \,\mathrm{ch}^2 \beta_0}{\lambda \sqrt{2} \cos^2 \gamma_0} [(2\alpha_0 + \sin 2\gamma_0) \cos 2(\alpha_0 - \gamma_0) + \cos 2\gamma_0 \sin 2(\alpha_0 - \gamma_0)]\,\varepsilon + \text{termes en } \varepsilon^2.
$$

Le coefficient de ε est donc entièrement déterminé par la structure de la lentille ronde. Il en serait de même du coefficient de ε^2.

Application au microscope électronique :

a. Pour un objectif usuel $x = 0{,}20$, d'où [relation (11)]

$$f = 1{,}2\, z_0.$$

On trouve avec $k = \frac{2}{3}$

$$\boxed{\Delta f = 3{,}56\, \varepsilon\, z_0.}$$

b. Au minimum de la distance focale (courbe 1) on a

$$x = 0{,}058, \qquad f = 0{,}77\, z_0.$$

Il en résulte

$$\boxed{\Delta f = 0{,}18\, \varepsilon\, z_0.}$$

c. Pour $x = 0{,}01$ on trouve

$$\boxed{\Delta f = -60\, \varepsilon\, z_0.}$$

Dans un bon objectif de microscope électronique on peut admettre

$$\varepsilon = \eta_1 = \frac{\Delta R_1}{R_1} \simeq 5.10^{-5}.$$

D'autre part, z_0 est de l'ordre de ¼ mm. Il en résulte pour les trois cas envisagés

$$\Delta f = 0{,}716\, \mu, \quad 0{,}036\, \mu, \quad -12\, \mu$$

respectivement. Si l'on table sur une demi-ouverture de $\alpha = 3.10^{-3}$, on peut prévoir pour le pouvoir séparateur de l'objectif $2{,}1$ mμ; $0{,}1$ mμ; 36 mμ respectivement. (La valeur de $0{,}1$ mμ devra toutefois être doublée, comme nous allons le voir dans l'étude du Δz_F).

Signalons qu'entre le Δf que nous venons de calculer d'une manière explicite et les constantes C_s et C' introduites par P. Grivet [8] et H. Bruck [10], on a les relations

$$\Delta f = 2C_s = 2C'.$$

La figure 5 montre la variation de Δf en fonction de x. On voit que lorsque x varie de 1 à $0{,}01$, $\frac{\Delta f}{z_0}$ décroît d'abord jusqu'à zéro, pour augmenter ensuite en valeur absolue.

Aux termes en ε^2 près, Δf est nul pour

$$(31) \qquad \boxed{\operatorname{tg} 2(\alpha_0 - \gamma_0) = -\frac{2\alpha_0 + \sin 2\gamma_0}{\cos 2\gamma_0}.}$$

La solution est $x = 0{,}055$ à 2 % près. On voit que la valeur de x qui rend Δf nul est très voisine de celle qui rend f minimum, comme le laissait déjà prévoir une analyse élémentaire [7].

Le fait que Δf puisse s'annuler en dépit d'une valeur finie de la différence entre les deux axes du trou central ne doit pas nous étonner. Il s'explique par la forme de la courbe $f = f(x)$ (*fig.* 1). Dans le

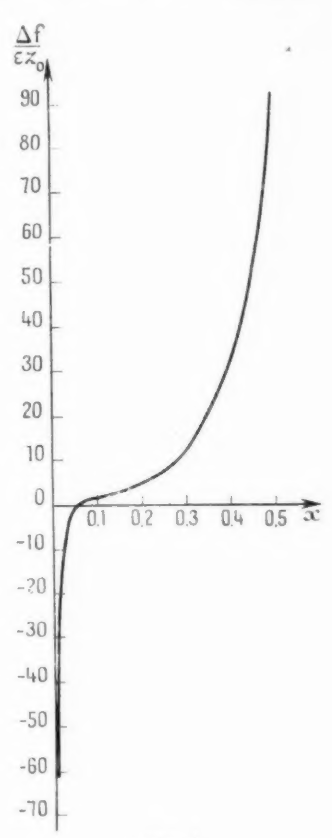


Fig. 5.

fonctionnement habituel de la lentille, le point figuratif est situé sur la branche droite de la courbe et la distance focale la plus grande correspond au rayon le plus fort. Par contre, sur branche gauche de la courbe, la distance focale sera d'autant plus forte que le rayon du trou sera plus faible. On conçoit donc que pour une certaine valeur de x, il puisse y avoir égalité entre les deux distances focales. On pourrait trouver cette valeur de x à partir de l'équation $f_X = f_Y$ mais par suite de l'extrême petitesse de ε, il est beaucoup plus précis de développer Δf suivant les puissances de ε et

d'annuler le coefficient en ε de ce développement, comme nous l'avons fait plus haut.

11. Étude de la position des foyers.

De l'égalité $\Delta f = 0$ il ne faut pas conclure à la nullité des aberrations d'ellipticité. Elle montre seulement que pour une certaine valeur de x, la différence entre l'abscisse du foyer et celle du plan principal ($f = z_F - z_P$) est la même pour les deux plans de symétrie.

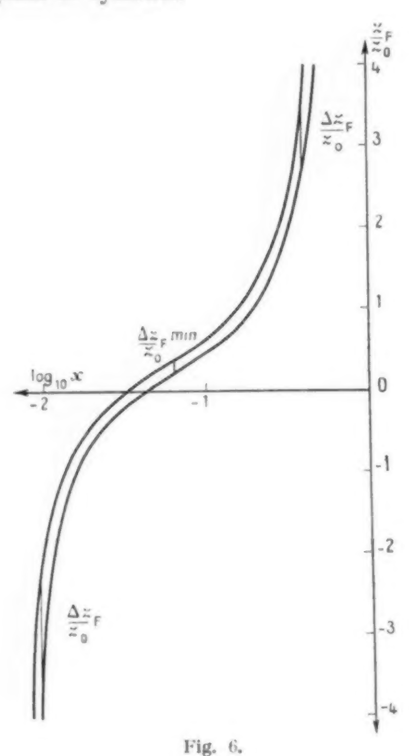


Fig. 6.

Par contre, si la différence $\Delta z_F = z_{FX} - z_{FY}$ passe par un minimum, les aberrations d'ellipticité passeront bien par un minimum. Il est clair pour commencer que Δz_F ne saurait être négatif ou nul. En effet, la fonction $z_F = z_F(x)$ (*fig.* 2) décroît constamment lorsque x décroît de 1 à 0,01, région que nous étudierons ici. A un rayon plus petit correspondra donc toujours un z_F plus faible [rappelons qu'en régime unipotentiel, x est proportionnel à R_1; relation (3)]. La figure 6 montre ensuite que Δz_F passe nécessairement par un minimum. On peut préciser cette question par le calcul (*voir* appendice II).

On trouve pour la différence

$$(52)\quad \Delta z_F = \frac{\sqrt{E}}{2\lambda}\left\{ f\left[(2F+1)\sin 2(\alpha_0+\delta_0) - \left(2\alpha_0 + \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}\,\frac{\sin 4\delta_0}{2} \right) \times \cos 2(\alpha_0+\delta_0) \right] + \Delta f \right\}\varepsilon + \text{termes en } \varepsilon^2.$$

Par suite de la présence du facteur f^2 dans l'expression de Δf, ce terme sera généralement le plus important. La quantité $\frac{\sqrt{E}}{2\lambda}$ étant voisine de 1, il résulte qu'en général Δz_F et Δf seront voisins en valeur absolue. Il n'en est plus de même lorsqu'on

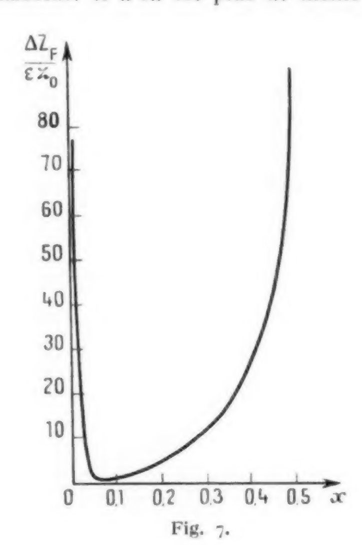


Fig. 7.

approche de f minimum, car dans ce cas le deuxième terme de l'accolade tend vers zéro et le premier subsiste seul. Pour la valeur $x = 0{,}055$ qui annule Δf, on trouve

$$(53)\qquad \boxed{(\Delta z_F)_{\min} = 0{,}38\,\varepsilon z_0.}$$

La figure 7 montre la variation de $\frac{\Delta z_F}{\varepsilon z_0}$ lorsque x varie de 0,01 à 0,5. On voit que pour le point de fonctionnement usuel de l'objectif ($x = 0{,}20$) le Δz_F est environ dix fois plus grand qu'au minimum de la distance focale.

L'étude précédente montre que le minimum de la courbe $f = f(x)$ (*fig.* 1) constitue un point de fonctionnement remarquable en ce qui concerne les aberrations d'ellipticité. On peut généraliser ce raisonnement et montrer qu'en ce point, toutes les aberrations sont minima. En effet, lorsqu'on fait

varier le paramètre x entre 1 et 0,01, la pente du rayon émergent augmente en valeur absolue jusqu'à une certaine limite et décroît ensuite [*voir* [7], *fig.* 18]. Au voisinage de la pente maximum, la trajectoire est stationnaire par rapport à une variation du paramètre x et il est à prévoir que les aberrations qui dépendent de x seront minima dans cette région. Or, la pente maximum $\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_0}\right]_{\max}$ rend la distance focale minimum car $f = \frac{-r_0}{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_0}}$ et nous avons montré que f est minimum pour $x = 0{,}058$.

Il a été prouvé expérimentalement que la distorsion est nulle au minimum de la distance focale [11]. L'expérience a prouvé également [12] que les aberrations de sphéricité sont minima en ce point remarquable. Les preuves expérimentales au sujet des aberrations d'ellipticité restent encore à faire.

12. Remarques au sujet de la réduction des aberrations d'ellipticité.

L'on a proposé de différents côtés de compenser l'ellipticité inévitable de la pièce centrale de la lentille par une ellipticité artificielle du trou de l'électrode extérieure. Un tel procédé ne saurait être efficace. En effet, la relation (1) montre clairement que lorsque $z_0 \geqq 3\ R_2$ (cas général), le potentiel au centre qui détermine toutes les propriétés optiques de la lentille, est absolument insensible à une variation du rayon R_2 et, par conséquent, à une ellipticité éventuelle du trou de l'électrode extérieure.

Par contre, $\Phi(0)$ est très sensible à une variation du rayon R_1 (d'où la sensibilité du pouvoir séparateur à une ellipticité du trou de l'électrode centrale) et à une variation de z_0. Cette dernière remarque suggère une méthode originale pour compenser le défaut de symétrie du trou central : c'est de rendre z_0 variable suivant l'azimut. Le calcul exact d'un système de ce genre, quoique non impossible, est assez ardu. On peut cependant dégrossir le problème par le raisonnement suivant : le défaut de symétrie du trou central se traduit par une relation de la forme

$$R_1 = \bar{R}_1(1 - \varepsilon_{R_1} \cos 2\theta) \qquad (\bar{R}_1 = \text{rayon moyen}).$$

Construisons une lentille pour laquelle z_0 possède la forme

$$z_0 = \bar{z}_0(1 - \varepsilon_{z_0} \cos 2\theta)$$
$$(\bar{z}_0 = \text{distance moyenne entre électrodes}).$$

Si l'on demande que $\frac{R_1}{z_0}$ ait la même valeur dans tous les azimuts afin de garder intacte la relation (1), il faut que $\varepsilon_{R_1} = \varepsilon_{z_0}$. Il semble donc, d'après ce raisonnement, que le défaut sur la distance entre électrodes doive être du même ordre de grandeur que la différence des axes du trou central. Une étude plus approfondie de ce problème est actuellement en cours.

TRAJECTOIRES SITUÉES DANS UN MÉRIDIEN INITIAL QUELCONQUE.

13. Établissement des équations.

Jusqu'à présent, nous avons considéré les trajectoires cheminant dans les plans de symétrie, c'est-à-dire nous avons supposé $\theta_0 = 0$ et $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Nous allons admettre maintenant que θ_0 peut être quelconque.

Nous considérerons toujours un rayon initialement parallèle à l'axe. A l'entrée de la lentille, la trajectoire est alors définie par

$$\text{(54)} \qquad \begin{cases} r(-z_0) = r_0, & r'(-z_0) = 0; \\ \theta(-z_0) = \theta_0, & \theta'(-z_0) = 0. \end{cases}$$

a. Région d'incidence. — Comme nous avons vu précédemment, on a affaire ici à une lentille ronde. Les fonctions $r = r(z)$ et $\theta = \theta(z)$ seront alors données par

$$\text{(55)} \qquad \begin{cases} r = r_0 \operatorname{ch}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z + z_0)\right], \\ \theta = \theta_0. \end{cases}$$

b. Région centrale. — Les équations différentielles valables dans cette région sont données par le système (38). Pour simplifier ces équations, nous ferons d'abord une contraction sur l'axe des z, définie par le changement de variable

$$\text{(56)} \qquad \alpha z = \operatorname{sh} \alpha\xi.$$

On a alors

$$\text{(57)} \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = r' \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha\xi}, \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} = \theta' \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha\xi}; \\ \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} = r'' \frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha\xi} - r' \frac{\alpha \operatorname{sh}\alpha\xi}{\operatorname{ch}^3\alpha\xi}, \\ \frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}z^2} = \theta'' \frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha\xi} - \theta' \frac{\alpha \operatorname{sh}\alpha\xi}{\operatorname{ch}^3\alpha\xi}; \end{cases}$$

les virgules indiquant ici une dérivation par rapport à ξ.

Le système (38) prend alors la forme

$$(58)\qquad \boxed{\begin{aligned} & r'' + \frac{\alpha^2}{2} r = \left(\frac{\alpha^2}{2} \varepsilon \cos 2\theta + \theta'^2 \right) r, \\ & r\theta'' + 2 r'\theta' + \frac{\varepsilon\alpha^2}{2} r \sin 2\theta = 0. \end{aligned}}$$

Posons ensuite

$$(59)\qquad \left\{ \begin{aligned} & u = r e^{i\theta}, \\ & u' = e^{i\theta}(r' + ir\theta'), \\ & u'' = e^{i\theta}[r'' - r\theta'^2 + i(2r'\theta' + r\theta'')]. \end{aligned} \right.$$

Les relations (58) sont alors condensées en une seule équation

$$(60)\qquad \boxed{\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{\alpha^2}{2} u = \frac{\varepsilon\alpha^2}{2} \bar{u}.}$$

Si l'on considère les projections du mouvement sur les deux plans de symétrie

$$r_X = r\cos\theta \quad \text{et} \quad r_Y = r\cos\theta,$$

l'équation (60) permet d'écrire immédiatement

$$(61)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 r_X}{dz^2} + \frac{\alpha^2}{2}(1 - \varepsilon) r_X = 0, \\ & \frac{d^2 r_Y}{dz^2} + \frac{\alpha^2}{2}(1 + \varepsilon) r_Y = 0. \end{aligned} \right.$$

Il en résulte

$$(62)\qquad \left\{ \begin{aligned} & r_X = A_X \cos\left[\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}} \operatorname{arc\,sh} \alpha z - \varphi_X \right], \\ & r_Y = A_Y \cos\left[\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} \operatorname{arc\,sh} \alpha z - \varphi_Y \right]. \end{aligned} \right.$$

c. Région d'émergence. — En posant

$$(63)\qquad \beta(z - z_0) = \sin \beta\xi,$$

le système (41) devient

$$(64)\qquad \left\{ \begin{aligned} & r'' - \frac{\beta^2}{2} r = \theta'^2 r, \\ & r\theta'' + 2r'\theta' = 0, \end{aligned} \right.$$

soit, en introduisant encore la variable $u = re^{i\theta}$,

$$(65)\qquad \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{\beta^2}{2} u = 0.$$

Il en résulte pour les projections du mouvement sur les deux plans de symétrie

$$(66)\qquad \left\{ \begin{aligned} & r_X = B_X \begin{matrix}\text{ch}\\ \text{sh}\end{matrix} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z - z_0) - \psi_X \right], \\ & r_Y = B_Y \begin{matrix}\text{ch}\\ \text{sh}\end{matrix} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z - z_0) - \psi_Y \right]. \end{aligned} \right.$$

Les équations (37) conduisent évidemment au même résultat.

14. Détermination des coefficiens.

La continuité de la trajectoire et de sa dérivée aux points de jonction des trois régions permet d'écrire les huit équations

$$(67)\qquad \left\{ \begin{aligned} & r_{X\,\text{inci}}(-kz_0) = r_{X\,\text{cent}}(-kz_0), \\ & r_{X\,\text{cent}}(kz_0) = r_{X\,\text{émerz}}(kz_0); \\ & r'_{X\,\text{inci}}(-kz_0) = r'_{X\,\text{cent}}(-kz_0), \\ & r'_{X\,\text{cent}}(kz_0) = r'_{X\,\text{émerz}}(kz_0); \\ & r_{Y\,\text{inci}}(-kz_0) = r_{Y\,\text{cent}}(-kz_0), \\ & r_{Y\,\text{cent}}(kz_0) = r_{Y\,\text{émerz}}(kz_0); \\ & r'_{Y\,\text{inci}}(-kz_0) = r'_{Y\,\text{cent}}(-kz_0), \\ & r'_{Y\,\text{cent}}(kz_0) = r'_{Y\,\text{émerz}}(kz_0) \end{aligned} \right.$$

qui déterminent les huit coefficients A_X, A_Y, B_X, B_Y, φ_X, φ_Y, ψ_X, ψ_Y. Le résultat est donné dans le résumé suivant.

15. Résumé des formules.

Un rayon initialement parallèle à l'axe et de caractéristique r_0, θ_0 est défini à l'intérieur de la lentille elliptique par

$$(68)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \text{Région d'incidence :} \\ & r_X = r_0 \,\text{ch}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z + z_0) \right], \\ & \qquad r_Y = r_X, \qquad \theta = \theta_0; \\ & \text{Région centrale :} \\ & r_X = r\cos\theta = A_X \cos\left[\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}} \operatorname{arc\,sh} \alpha z - \varphi_X \right], \\ & r_Y = r\sin\theta = A_Y \cos\left[\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} \operatorname{arc\,sh} \alpha z - \varphi_Y \right], \\ & r^2 = A_X^2 \cos^2\left[\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}} \operatorname{arc\,sh} \alpha z - \varphi_X \right] \\ & \qquad + A_Y^2 \cos^2\left[\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} \operatorname{arc\,sh} \alpha z - \varphi_Y \right], \\ & \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{A_Y}{A_X} \frac{\cos\left[\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} \operatorname{arc\,sh} \alpha z - \varphi_Y \right]}{\cos\left[\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}} \operatorname{arc\,sh} \alpha z - \varphi_X \right]}; \\ & \text{Région d'émergence :} \\ & r_X = r\cos\theta = B_X \begin{matrix}\text{ch}\\ \text{sh}\end{matrix} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z - z_0) - \psi_X \right], \\ & r_Y = r\sin\theta = B_Y \begin{matrix}\text{ch}\\ \text{sh}\end{matrix} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z - z_0) - \psi_Y \right], \\ & r^2 = B_X^2 \begin{matrix}\text{ch}^2\\ \text{sh}^2\end{matrix} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z - z_0) - \psi_X \right] \\ & \qquad + B_Y^2 \begin{matrix}\text{ch}^2\\ \text{sh}^2\end{matrix} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z - z_0) - \psi_Y \right], \\ & \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{B_Y}{B_X} \frac{\begin{matrix}\text{ch}\\ \text{sh}\end{matrix} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z - z_0) - \psi_Y \right]}{\begin{matrix}\text{ch}\\ \text{sh}\end{matrix} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z - z_0) - \psi_X \right]}. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients A, ..., ψ sont donnés par

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned}
&A_X^2 = r_0^2 \cos^2\theta_0(\mathrm{ch}^2\beta_0 + \lambda_X^2\,\mathrm{sh}^2\beta_0),\\
&\varphi_X = \mathrm{arc\,tg}\,\lambda_X\,\mathrm{th}\,\beta_0 - \alpha_0 X,\\
&\qquad |K_X| < 1:\\
&B_X^2 = A_X^2\left[\cos^2(\alpha_0 X - \varphi_X) - \frac{1}{\lambda_X^2}\sin^2(\alpha_0 X - \varphi_X)\right],\\
&\psi_X = \mathrm{arc\,th}\,\frac{1}{\lambda_X}\mathrm{tg}(\alpha_0 X - \varphi_X) - \beta_0,\\
&r_{X\,\mathrm{emerg}} = B_X\,\mathrm{ch}[\quad];\\
&\qquad |K_X| > 1,\\
&B_X^2 = A_X^2\left[\frac{1}{\lambda_X^2}\sin^2(\alpha_0 X - \varphi_X) - \cos^2(\alpha_0 X - \varphi_X)\right],\\
&\psi_X = \mathrm{arc\,th}\,\lambda_X \cot(\alpha_0 X - \varphi_X) - \beta_0,\\
&r_{X\,\mathrm{emerg}} = B_X\,\mathrm{sh}[\quad];\\
&A_Y^2 = r_0^2 \sin^2\theta_0(\mathrm{ch}^2\beta_0 + \lambda_Y^2\,\mathrm{sh}^2\beta_0),\\
&\varphi_Y = \mathrm{arc\,tg}\,\lambda_Y\,\mathrm{th}\,\beta_0 - \alpha_0 Y,\\
&\qquad |K_Y| < 1:\\
&B_Y^2 = A_Y^2\left[\cos^2(\alpha_0 Y - \varphi_Y) - \frac{1}{\lambda_Y^2}\sin^2(\alpha_0 Y - \varphi_Y)\right],\\
&\psi_Y = \mathrm{arc\,th}\,\frac{1}{\lambda_Y}\mathrm{tg}(\alpha_0 Y - \varphi_Y) - \beta_0,\\
&r_{Y\,\mathrm{emerg}} = B_Y\,\mathrm{ch}[\quad];\\
&\qquad |K_Y| > 1,\\
&B_Y^2 = A_Y^2\left[\frac{1}{\lambda_Y^2}\sin^2(\alpha_0 Y - \varphi_Y) - \cos^2(\alpha_0 Y - \varphi_Y)\right],\\
&\psi_Y = \mathrm{arc\,th}\,\lambda_Y \cot(\alpha_0 Y - \varphi_Y) - \beta_0,\\
&r_{Y\,\mathrm{emerg}} = B_Y\,\mathrm{sh}[\quad].
\end{aligned}\right.$$

Dans ces relations

$$x = \frac{\Phi(0)}{\Phi(z_0)},$$

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned}
&\alpha = \frac{1}{z_0}\sqrt{\frac{1}{k}\,\frac{1-x}{x}}, \qquad \beta = \frac{1}{z_0}\sqrt{\frac{1}{1-k}(1-x)},\\
&\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,sin}\,\beta(1-k)z_0;\\
&\alpha_0 X = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}\,\mathrm{arc\,sh}\,\alpha k z_0 = \sqrt{1-\varepsilon}\,\alpha_0;\\
&\alpha_0 Y = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}}\,\mathrm{arc\,sh}\,\alpha k z_0 = \sqrt{1+\varepsilon}\,\alpha_0;\\
&\lambda = \sqrt{\frac{k}{1-k}}, \qquad \lambda_X = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\lambda, \qquad \lambda_Y = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\lambda;\\
&K_X = \frac{1}{\lambda_X}\mathrm{tg}(\alpha_0 X - \varphi_X), \qquad K_Y = \frac{1}{\lambda_Y}\mathrm{tg}(\alpha_0 Y - \varphi_Y).
\end{aligned}\right.$$

Les relations (68), (69) et (70) déterminent entièrement les rayons principaux de Gauss à l'intérieur de la lentille elliptique. Ces trajectoires peuvent être calculées numériquement en fonction de l'ellipticité relative ε, du paramètre x qui caractérise la structure de la lentille non perturbée et des conditions initiales r_0, θ_0.

16. Trajectoires à l'extérieur de la lentille (asymptotes).

A la sortie de la lentille, la marche des rayons est régie par

$$(71)\qquad r''(z) = 0.$$

En intégrant, on trouve pour les projections du mouvement dans les deux plans de symétrie

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned}
&\qquad |K_X| < 1,\\
&r_X = B_X\left[\mathrm{ch}\,\psi_X - \frac{\beta(z-z_0)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sh}\,\psi_X\right];\\
&\qquad |K_Y| < 1,\\
&r_Y = B_Y\left[\mathrm{ch}\,\psi_Y - \frac{\beta(z-z_0)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sh}\,\psi_Y\right];\\
&r^2 = B_X^2\left[\mathrm{ch}\,\psi_X - \frac{\beta(z-z_0)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sh}\,\psi_X\right]^2\\
&\qquad + B_Y^2\left[\mathrm{ch}\,\psi_X - \frac{\beta(z-z_0)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sh}\,\psi_Y\right]^2;\\
&\theta = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{B_Y}{B_X}\,\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\psi_Y - \beta(z-z_0)\,\mathrm{sh}\,\psi_Y}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\psi_X - \beta(z-z_0)\,\mathrm{sh}\,\psi_X};
\end{aligned}\right.$$

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned}
&\qquad |K_X| > 1,\\
&r_X = B_X\left[-\mathrm{sh}\,\psi_X + \frac{\beta(z-z_0)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{ch}\,\psi_X\right];\\
&\qquad |K_Y| > 1,\\
&r_Y = B_Y\left[-\mathrm{sh}\,\psi_Y + \frac{\beta(z-z_0)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{ch}\,\psi_Y\right];\\
&r^2 = B_X^2\left[\frac{\beta(z-z_0)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{ch}\,\psi_X - \mathrm{sh}\,\psi_X\right]^2\\
&\qquad + B_Y^2\left[\frac{\beta(z-z_0)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{ch}\,\psi_Y - \mathrm{sh}\,\psi_Y\right]^2;\\
&\theta = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{B_Y}{B_X}\,\frac{\beta(z-z_0)\,\mathrm{ch}\,\psi_Y - \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,\psi_Y}{\beta(z-z_0)\,\mathrm{ch}\,\psi_X - \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,\psi_X}.
\end{aligned}\right.$$

17. Propriétés focales.

L'ellipticité relative ε étant supposée très faible, les coefficients $\varphi(x, \varepsilon)$ et $\psi(x, \varepsilon)$ représentant le déphasage de la trajectoire suivront de très près les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ de la lentille ronde dont les courbes ont été établies antérieurement [7]. Par contre, les coefficients $A(x, \varepsilon)$ et $B(x, \varepsilon)$ qui représentent l'amplitude de la trajectoire différeront dans

le rapport de $\cos\theta_0$ et $\sin\theta_0$ des coefficients $A(x)$ et $B(x)$ calculés pour la lentille ronde [7].

Si l'on se donne alors une lentille de caractéristiques (x, ε), à une dilatation près, la projection r_X se comportera sensiblement comme la trajectoire r d'une lentille ronde de paramètre $x + \Delta x$, tandis que, à une autre dilatation près, la projection r se comportera sensiblement comme une trajectoire gaussienne de paramètre $x - \Delta x$.

Il en résulte que les intersections avec l'axe de la projection r_X seront à peu près celles d'un rayon r cheminant dans une lentille ronde de paramètre $x + \Delta x$, tandis que les intersections avec l'axe de la projection r_Y seront à peu près celles d'une trajectoire gaussienne cheminant dans une lentille ronde de paramètre $x - \Delta x$. Les intersections seront, en général, différentes et, par conséquent, la trajectoire ne peut, en général, couper l'axe de la lentille. Une exception est constituée par les rayons cheminant dans les plans de symétrie qui restent constamment dans ces plans et auront des intersections avec l'axe soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de la lentille.

L'absence d'intersections entraîne l'impossibilité de focaliser en un point image des rayons issus d'un point objet : pour un azimut quelconque $\theta_0 \neq n\frac{\pi}{2}$, la lentille elliptique ne possède pas de propriétés focales. Les « distances focales » peuvent être définies seulement dans les plans de symétrie de la lentille et sont alors données par les relations (48).

Toutefois, l'écart à la symétrie de révolution étant supposé très faible, les racines de l'équation

$$r_X(z) = 0 \quad \text{et} \quad r_Y(z) = 0$$

sont très voisines et la distance à l'axe du rayon r sera très faible au voisinage de ces intersections.

Toutes ces propriétés peuvent être précisées par le calcul.

18. Expression des coefficients en fonction de ε, considéré comme infiniment petit principal.

Par suite de la petitesse de ε, les expressions (68), (69) et (70) ne se prêtent que difficilement aux calculs numériques. Nous allons donc exprimer les quantités figurant dans ces expressions en fonction de ε, considéré comme infiniment petit du premier ordre.

Les relations (70) fournissent d'abord

$$(74)\quad \begin{cases} \alpha_{0X} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha_0, \\ \alpha_{0Y} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha_0, \end{cases}$$

$$(75)\quad \begin{cases} \lambda_X = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\lambda, \\ \lambda_Y = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\lambda. \end{cases}$$

On trouve ensuite, après quelques calculs,

$$(76)\quad \begin{cases} A_X^2 = A^2(1 + \varepsilon\sin^2\gamma_0)\cos^2\theta_0, \\ A_Y^2 = A^2(1 - \varepsilon\sin^2\gamma_0)\sin^2\theta_0, \end{cases}$$

$$(77)\quad \begin{cases} \varphi_X = \varphi + \frac{\varepsilon}{4}(2\alpha_0 + \sin 2\gamma_0), \\ \varphi_Y = \varphi - \frac{\varepsilon}{4}(2\alpha_0 + \sin 2\gamma_0); \end{cases}$$

$$(78)\quad \begin{cases} \dfrac{B_X^2}{\cos^2\theta_0} = B^2 + \varepsilon\Big\{ B^2\sin^2\gamma_0 \pm A^2\sin^2(\alpha_0 - \varphi) \\ \qquad \times \left[\dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{\lambda^2+1}{2\lambda^2}\cot(\alpha_0 - \varphi) \times (4\alpha_0 + \sin 2\gamma_0)\right]\Big\}, \\ \dfrac{B_Y^2}{\sin^2\theta_0} = B^2 - \varepsilon\Big\{ B^2\sin^2\gamma_0 \pm A^2\sin^2(\alpha_0 - \varphi) \\ \qquad \times \left[\dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{\lambda^2+1}{2\lambda^2}\cot(\alpha_0 - \varphi) \times (4\alpha_0 + \sin 2\gamma_0)\right]\Big\}; \end{cases}$$

$$(79)\quad \begin{cases} \psi_X = \psi \mp \varepsilon\dfrac{A^2}{4\lambda B^2}[\sin 2(\alpha_0 - \varphi) + 4\alpha_0 + \sin 2\gamma_0], \\ \psi_Y = \psi \pm \varepsilon\dfrac{A^2}{4\lambda B^2}[\sin 2(\alpha_0 - \varphi) + 4\alpha_0 + \sin 2\gamma_0]. \end{cases}$$

Dans les deux dernières relations les signes supérieurs sont à prendre pour

$$|K_{X,Y}| < 1 \quad \text{et} \quad |K| < 1,$$

tandis que les signes inférieurs sont à prendre dans le cas où

$$|K_{X,Y}| > 1 \quad \text{et} \quad |K| > 1.$$

Les coefficients de la lentille elliptique sont ainsi exprimés en fonction des coefficients de la lentille ronde et représentés par des relations linéaires en ε.

19. Calcul des trajectoires en fonction de ε.

Comme pour les coefficients, le calcul des trajectoires suivant les formules générales (68) à (70) est pénible et manque de précision lorsque ε est petit, ce qui est le cas général. D'un autre côté, il est intéressant de pouvoir exprimer un paramètre

quelconque p de la lentille perturbée sous la forme

$$p = p_r + \varepsilon p_c, \tag{80}$$

où p_r est le paramètre correspondant de la lentille non perturbée et p_c un terme correctif, dépendant de la structure de la lentille. Nous allons donc développer les expressions des trajectoires en série de ε, en nous souvenant toutefois que ε est supposé petit, ou, d'une manière plus précise $\varepsilon < \frac{r_r}{r_0}$, r_r étant la trajectoire de Gauss de la lentille ronde.

On a par exemple dans la région centrale

$$\begin{aligned} r_X &= A_X \cos\left[\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}} \operatorname{arcsh} \alpha z - \varphi_X\right] \\ &= A \cos\theta_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\sin^2\gamma_0\right) \\ &\quad \times \cos\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsh} \alpha z - \varphi \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\varepsilon}{4}\left(\sqrt{2} \operatorname{arcsh} \alpha z + 2\alpha_0 + \sin 2\gamma_0\right)\right] \\ &= \cos\theta_0 \left\{ r_r + \frac{\varepsilon}{2}\left[r_r \sin^2\gamma_0 \right.\right. \\ &\qquad + \frac{1}{2} A\left(\sqrt{2} \operatorname{arcsh} \alpha z + 2\alpha_0 + \sin 2\gamma_0\right) \\ &\qquad \left.\left. \times \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsh} \alpha z - \varphi\right)\right]\right\}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} r_Y = \sin\theta_0 &\left\{ r_r - \frac{\varepsilon}{2}\left[r_r \sin^2\gamma_0 \right.\right. \\ &+ \frac{1}{2} A\left(\sqrt{2} \operatorname{arcsh} \alpha z + 2\alpha_0 + \sin 2\gamma_0\right) \\ &\left.\left. \times \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsh} \alpha z - \varphi\right)\right]\right\}. \end{aligned}$$

On peut appliquer le même procédé aux autres régions.

En posant

$$\frac{1}{2} A\left(\sqrt{2} \operatorname{arcsh} \alpha z + 2\alpha_0 + \sin 2\gamma_0\right) = L, \tag{81}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\lambda^2+1}{2\lambda^2} \cot(\alpha_0 - \varphi)(4\alpha_0 + \sin 2\gamma_0) = M, \tag{82}$$

$$\sin 2(\alpha_0 - \varphi) + 4\alpha_0 + \sin 2\gamma_0 = N, \tag{83}$$

on trouve après des calculs un peu longs mais sans difficulté réelle :

a. Région d'incidence :

$$r = r_r, \qquad \theta = \theta_0. \tag{84}$$

b. Région centrale :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{r_X}{\cos\theta_0} &= r_r + \frac{\varepsilon}{2}\left[r_r \sin^2\gamma_0 \right. \\ &\qquad \left. + L \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsh} \alpha z - \varphi\right)\right], \\ \frac{r_Y}{\sin\theta_0} &= r_r - \frac{\varepsilon}{2}\left[r_r \sin^2\gamma_0 \right. \\ &\qquad \left. + L \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsh} \alpha z - \varphi\right)\right]. \end{aligned}\right. \tag{85}$$

c. Région d'émergence :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{r_X}{\cos\theta_0} &= r_r + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\quad \times \left\{ r_r \left[\sin^2\gamma_0 \pm \frac{A^2}{B^2} M \sin^2(\alpha_0 - \varphi)\right] \right. \\ &\qquad \left. \pm \frac{A^2}{2\lambda B} N \begin{smallmatrix}\mathrm{sh}\\ \mathrm{ch}\end{smallmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z - z_0) - \psi\right]\right\}, \\ \frac{r_Y}{\sin\theta_0} &= r_r - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\quad \times \left\{ r_r \left[\sin^2\gamma_0 \pm \frac{A^2}{B^2} M \sin^2(\alpha_0 - \varphi)\right] \right. \\ &\qquad \left. \pm \frac{A^2}{2\lambda B} N \begin{smallmatrix}\mathrm{sh}\\ \mathrm{ch}\end{smallmatrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \beta(z - z_0) - \psi\right]\right\}, \end{aligned}\right. \tag{86}$$

d. Région extérieure :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{r_X}{\cos\theta_0} &= r_r + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\quad \times \left\{ r_r \left[\sin^2\gamma_0 \pm \frac{A^2}{B^2} M \sin^2(\alpha_0 - \varphi)\right] \right. \\ &\qquad \left. - \frac{A^2}{2\lambda B} N \left[\begin{smallmatrix}\mathrm{sh}\\ \mathrm{ch}\end{smallmatrix}\psi - \frac{\beta}{\sqrt{2}}(z - z_0) \begin{smallmatrix}\mathrm{ch}\\ \mathrm{sh}\end{smallmatrix}\psi\right]\right\}, \\ \frac{r_Y}{\sin\theta_0} &= r_r - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\quad \times \left\{ r_r \left[\sin^2\gamma_0 \pm \frac{A^2}{B^2} M \sin^2(\alpha_0 - \varphi)\right] \right. \\ &\qquad \left. - \frac{A^2}{2\lambda B} N \left[\begin{smallmatrix}\mathrm{sh}\\ \mathrm{ch}\end{smallmatrix}\psi - \frac{\beta}{\sqrt{2}}(z - z_0) \begin{smallmatrix}\mathrm{ch}\\ \mathrm{sh}\end{smallmatrix}\psi\right]\right\}. \end{aligned}\right. \tag{87}$$

Dans les relations (86) et (87) les symboles supérieurs sont à prendre pour

$$|K| < 1 \quad \text{et} \quad |K_{X,Y}| < 1,$$

tandis que les symboles inférieurs s'appliquent au cas

$$|K| > 1 \quad \text{et} \quad |K_{X,Y}| > 1.$$

Les formules ainsi établies montrent que les projections de la trajectoire gaussienne sur les deux plans de symétrie sont données, aux termes en ε^2 près, par des relations de la forme

$$\left\{\begin{aligned} r_X &= r_r(x, z)\left[1 + \varepsilon g(x, z)\right] \cos\theta_0, \\ r_Y &= r_r(x, z)\left[1 - \varepsilon g(x, z)\right] \sin\theta_0. \end{aligned}\right. \tag{88}$$

En coordonnées polaires, la trajectoire gaussienne dans la lentille elliptique sera alors définie par

$$(89)\quad \begin{cases} r = r_r[1 + \varepsilon g(x, z)\cos 2\theta_0], \\ \operatorname{tg}\theta = [1 - 2\varepsilon g(x, z)]\operatorname{tg}\theta_0, \end{cases}$$

la fonction $g(x, z)$ étant explicitée par les relations (85) (86) et (87). Or, la trajectoire de Gauss de la lentille ronde $r_r(x, z)$ a été calculée une fois pour toutes en fonction du paramètre x [7]. En calculant une fois pour toutes la fonction $g(x, z)$, on aura déterminé toutes les trajectoires gaussiennes de la lentille elliptique d'ellipticité ε. La solution du problème est ainsi poussée jusqu'au bout.

La figure 8 montre le réseau des courbes $\frac{r_r(z)}{r_0}\,g(z)$

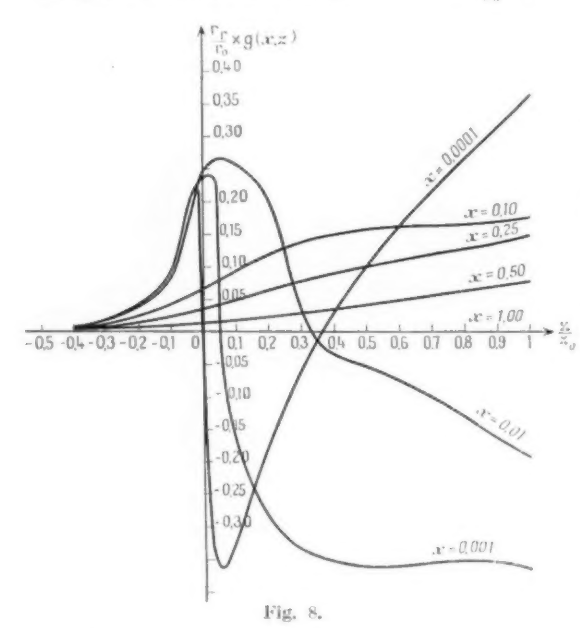


Fig. 8.

pour différentes valeurs du paramètre x. La fonction $r_r(x, z)\; g\,(x, z)$ est évidemment nulle dans la région d'incidence et linéaire en z à la sortie de la lentille. On voit d'autre part que lorsque x est assez petit pour que le rayon de Gauss de la lentille ronde oscille autour de l'axe, le terme correctif $\varepsilon r_r(x, z)$ $g(x, z)$ pourra présenter lui-même une allure oscillatoire.

Les relations (88) peuvent évidemment être généralisées sous la forme

$$(88\ bis)\quad \begin{cases} r_X = r_r(x, z)[1 + \varepsilon g_1(x, z) + \varepsilon^2 g_2(x, z) \\ \qquad\qquad + \varepsilon^3 g_3(x, z) + \ldots]\cos\theta_0, \\ r_Y = r_r(x, z)[1 - \varepsilon g_1(x, z) + \varepsilon^2 g_2(x, z) \\ \qquad\qquad - \varepsilon^3 g_3(x, z) + \ldots]\sin\theta_0. \end{cases}$$

Les fonctions g_1, g_2, g_3, dépendent uniquement de la structure de la lentille ronde et peuvent être explicitées par des relations analogues à (85), (86) et (87).

Les formules précédentes montrent qu'aux termes en ε^2 près, on a

$$(90)\quad \frac{r_X}{\cos\theta_0} + \frac{r_Y}{\sin\theta_0} = 2r_r.$$

A la même approximation, un rayon situé initialement dans le plan $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ aura constamment la même distance à l'axe que le rayon r_r de la lentille ronde.

20. Cas ou l'ellipticité ε est de l'ordre de grandeur de $\frac{r_r}{r_0}$.

Au voisinage de l'intersection avec l'axe de la trajectoire gaussienne de la lentille ronde, la quantité $\frac{r_r}{r_0}$ est très faible et peut devenir égale ou inférieure à ε. Les relations (88) restent toujours valables, mais le passage de (88) à (89) n'est plus légitime. On démontre aisément que le système (89) donnant la trajectoire elliptique doit être remplacé par

$$(91)\quad \begin{cases} r = r_r\sqrt{1 + 2\varepsilon g(x, z)\cos\theta_0 + \varepsilon^2 g^2(x, z)}, \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{r_r - \varepsilon r_r g(x, z)}{r_r + \varepsilon r_r g(x, z)}\operatorname{tg}\theta_0. \end{cases}$$

21. Cas ou $r_r = 0$.

Pour les valeurs de x, z qui rendent nulle la fonction r_r, c'est-à-dire aux points d'intersection avec l'axe de la trajectoire gaussienne de la lentille ronde, les fonctions $g(x, z)$ deviennent infinies, mais les quantités $r_r(x, z)\; g\,(x, z)$ restent finies. Les relations (85) deviennent alors

$$(92)\quad \begin{cases} r_X = \dfrac{\varepsilon}{2} L \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,sh}\alpha z - \varphi\right)\cos\theta_0, \\ r_Y = -\dfrac{\varepsilon}{2} L \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,sh}\alpha z - \varphi\right)\sin\theta_0, \\ \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,sh}\alpha z - \varphi\right) = 0. \end{cases}$$

De même les équations (86) s'écrivent

$$(93)\quad \begin{cases} r_X = -\dfrac{\varepsilon}{4}\dfrac{A^2}{\lambda B}\Lambda \\ \qquad \times \operatorname{ch}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,sin}\beta(z - z_0) - \psi\right]\cos\theta_0, \\ r_Y = \dfrac{\varepsilon}{4}\dfrac{A^2}{\lambda B}\Lambda \\ \qquad \times \operatorname{ch}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,sin}\beta(z - z_0) - \psi\right]\sin\theta_0, \\ \operatorname{sh}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,sin}\beta(z - z_0) - \psi\right] = 0. \end{cases}$$

Enfin, les formules (87) fournissent

$$(94)\quad \begin{cases} r_X = -\dfrac{\varepsilon}{4}\dfrac{A^2}{\lambda B}N\left[\dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}\psi - \dfrac{3}{\sqrt{2}}(z-z_0)\dfrac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}\psi\right]\cos\theta_0, \\ r_Y = \dfrac{\varepsilon}{4}\dfrac{A^2}{\lambda B}N\left[\dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}\psi - \dfrac{3}{\sqrt{2}}(z-z_0)\dfrac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}\psi\right]\sin\theta_0, \\ \sqrt{2}\dfrac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}\psi - 3(z-z_0)\dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}\psi = 0. \end{cases}$$

En effectuant les calculs, on trouve pour la distance à l'axe du rayon elliptique aux points où r_r est nul.

Région centrale :

$$(95)\quad r(r_r = 0) = \varepsilon\frac{A}{4}[(2n+1)\pi + 2\gamma_0 + \sin 2\gamma_0].$$

Région d'émergence :

$$(96)\quad r(r_r = 0) = \varepsilon\frac{A^2}{4\lambda B}[\sin 2(\alpha_0 - \varphi) + 4\alpha_0 + \sin 2\gamma_0].$$

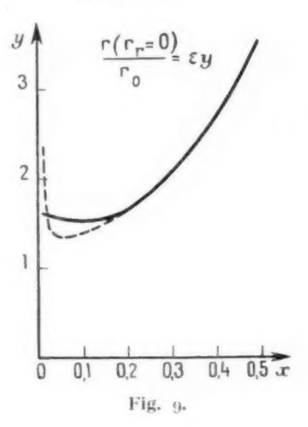


Fig. 9.

Région extérieure :

$$(97)\quad r(r_r = 0) = \varepsilon\frac{A^2}{4\lambda B}[\sin 2(\alpha_0 - \varphi) + 4\alpha_0 + \sin 2\gamma_0]\frac{1}{\frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}\psi}.$$

La figure 9 donne la courbe $\dfrac{r(r_r = 0)}{r}$ en fonction de x pour $0{,}01 < x < 0{,}5$.

Il est à remarquer qu'à l'extérieur de la lentille ($x > 0{,}199$), la fonction $r(r_r = 0)$ représente l'aberration géométrique transversale du rayon elliptique par rapport à la trajectoire gaussienne de la lentille ronde. En effet, à l'extérieur de la lentille, l'intersection du rayon r_r avec l'axe se confond avec le foyer gaussien $r_r(z_F) = 0$. L'aberration géométrique définie comme le vecteur $\vec{r} - \vec{r}_r$ dans le plan de Gauss, se confond alors avec $r(r_r = 0)$. Lorsque l'intersection avec l'axe du rayon de Gauss a lieu à l'intérieur de la lentille, il est nécessaire de faire intervenir l'asymtote à la trajectoire pour définir z_F et le plan de Gauss. L'aberration transversale est alors donnée par la courbe en pointillé de la figure 9.

PARTICULARITÉS GAUSSIENNES DES IMAGES FOURNIES PAR UNE LENTILLE ELLIPTIQUE ÉCLAIRÉE EN LUMIÈRE PARALLÈLE.

22. Image d'un cercle.

Considérons un cercle de rayon r_0 centré sur l'axe de la lentille et éclairé par un faisceau de lumière parallèle. Le plan du cercle est supposé perpendiculaire à l'axe de la lentille. Lorsqu'on a affaire à une lentille ronde, on pourra encore observer un cercle sur un écran placé à la sortie de la lentille. Le faisceau de rayons s'appuyant à l'entrée de la lentille sur le cercle de rayon r_0 gardera constamment une section circulaire pendant son passage à travers la lentille et coupera l'axe de celle-ci au point d'intersection de la trajectoire de Gauss.

Si l'on considère maintenant une lentille elliptique, le faisceau qui s'appuie à l'entrée sur un cercle de rayon r_0 possédera encore une section circulaire dans la région d'incidence (en conformité avec notre hypothèse initiale qui correspond très sensiblement à la réalité), mais présentera une section elliptique dans toutes les autres régions. Les axes de cette ellipse sont entièrement déterminés en fonction de la structure de la lentille par les relations (68), (69) et (72), (73) ou bien, si l'on néglige les termes en ε^2, par les relations (85), (86) et (87). Les équations (68) montrent que l'ellipse peut dégénérer en une droite focale $X = 0$ ou en une droite focale $Y = 0$ et que les valeurs de z pour lesquelles ces dégénérescences ont lieu sont très voisines et situées de part et d'autre de la valeur de z qui correspond à l'intersection avec l'axe du rayon r_r.

Les calculs que nous avons effectués précédemment permettent de déterminer en fonction de x, les intersections de r_r avec l'axe et, en fonction de x et de ε, la position des focales et la distance qui les sépare. En particulier, à l'extérieur de la lentille, les abscisses des focales sont données par z_{FX} (pour la focale parallèle à OY) et z_{FY} (pour la focale parallèle à OX). La distance Δz_F qui sépare les focales est donnée par la relation (52). A l'intérieur de la lentille, il est préférable de remplacer les abscisses des foyers par les intersections des trajectoires qui seules, ont une existence réelle. Quant à la longueur des segments focaux, correspondant à

un r_0 donné, il est facile de voir qu'elle a pour valeur $2\varepsilon r_Y(x, z)\; g(x, z)$, où z doit être remplacé par z_{F_X} ou z_{F_Y} lorsque les focales sont situées à l'extérieur de la lentille.

Pour $r_Y = 0$, l'ellipse dégénère en un cercle : c'est le « cercle de moindre confusion » dont le rayon est donné aux termes en ε^2 près par les relations (95), (96) et (97) et calculé en fonction de x dans la figure 9. On voit que le rayon de ce cercle qui représente l'aberration transversale dans la région située à l'extérieur de la lentille est de l'ordre de grandeur de ε, mais peut varier facilement du simple au double. Il ne pourra s'annuler qu'avec ε.

Il résulte des considérations précédentes qu'entre le point $z = -kz_0$ et l'abscisse du cercle de moindre confusion, le grand axe de l'ellipse représentant la section du faisceau sera parallèle à OX tandis que dans la région située entre le cercle de moindre confusion et l'infini, le grand axe de cette ellipse sera parallèle à OY.

Si le foyer gaussien de la lentille non perturbée est situé en dehors de celle-ci, on peut observer expérimentalement le phénomène du renversement des axes de l'ellipse sur un écran récepteur mobile suivant l'axe de la lentille. On peut observer le même phénomène en maintenant l'écran fixe et en agissant sur les paramètres électriques de la lentille de manière à déplacer convenablement son foyer.

23. Image d'une droite passant par l'axe de la lentille.

Considérons une droite coupant l'axe Oz de la lentille et faisant avec l'axe OX l'angle $\theta = \theta_0$. Une lentille ronde en fournira une image qui sera encore une droite faisant l'angle θ_0 avec l'axe OX. En régime elliptique gaussien, l'image sera toujours une droite, mais cette droite aura subi une rotation autour de l'axe OX. Nous allons étudier l'amplitude de cette rotation en fonction de la position de l'écran récepteur et de la structure de la lentille.

Soit (*fig.* 10) Oz l'axe de symétrie et F_X et F_Y les deux focales de la lentille elliptique étudiée. Plaçons successivement l'écran récepteur aux points P_1, F_X, C, F_Y et P_2.

α. En P_1, la demi-droite située initialement dans le méridien θ_0 aura subi une rotation donnée par les relations (88)

$$(98)\qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{r_Y}{r_X} = [1 - 2\varepsilon g(x, z_{P_1})] \operatorname{tg}\theta_0.$$

Pour une lentille bien déterminée, la fonction $g(x, z_{P_1})$ est constante. D'autre part, par suite de la petitesse de ε, la rotation $\theta - \theta_0$ sera faible. On peut, par conséquent, poser $\theta = \theta_0 + \iota$ et négliger les termes d'ordre 2 ou supérieurs en ι. On a dans ces conditions

$$(99)\qquad \iota_{P_1} = -\varepsilon g(x, z_{P_1}) \sin 2\theta_0.$$

Si x n'est pas trop petit (lentille faible), g sera positif et la rotation s'effectuera vers l'axe OX (grand axe de l'ellipse formée par le trou central de la lentille), quel que soit l'azimut du méridien

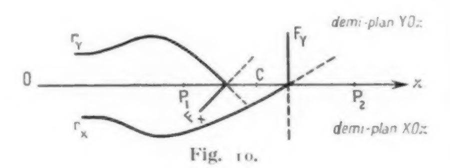


Fig. 10.

initial (*fig.* 11 *a*). Par contre, lorsque x est assez faible pour que le régime oscillatoire soit réalisé, la rotation pourra s'effectuer alternativement vers l'axe OX ou l'axe OY; elle pourra même être nulle pour $g(x, z_{P_1}) = 0$ (*fig.* 8). Ceci s'explique par le fait que l'électron défini initialement par r_0, θ_0 est susceptible d'osciller autour du méridien d'entrée θ_0 lorsque x est assez faible.

Si l'on considère maintenant une lentille bien définie, x sera constant. La rotation ι_{P_1} sera alors nulle pour une droite située initialement dans un plan de symétrie $\theta_0 = n\frac{\pi}{2}$ et maximum pour $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$. Au signe près, on aura

$$(100)\qquad \iota_{P_1\,\max} = \varepsilon g(x, z_{P_1}).$$

β. En F_X, on a $r_Y = 0$, par conséquent $\theta = 0$. Quel que soit l'azimut d'entrée de la droite, son image sur l'écran coïncidera avec l'axe OX (*fig.* 11 *b*).

γ. Au point C (cercle de moindre confusion), on a $r_Y = -r_X$ et, par suite, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ (*fig.* 11 *c*).

δ. En F_Y, r_X est nul et $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (*fig.* 11 *d*).

ε. En P_2, on a

$$(101)\qquad \operatorname{tg}(\theta + \pi) = [1 - 2\varepsilon g(x, z_{P_2})] \operatorname{tg}\theta_0$$

il en résulte

$$(102)\qquad \iota_{P_2} + \pi = -\varepsilon g(x, z_{P_2}) \sin 2\theta_0.$$

L'image est représentée par la figure 11 *e*.

En symétrie axiale, la rotation de π de la demi-droite θ_0 s'effectue brusquement lorsqu'on passe par le foyer. Dans la lentille elliptique, cette rotation

s'effectue d'une manière continue lorsqu'on traverse la région des focales.

On peut évidemment obtenir les mêmes images en gardant fixe la position de l'écran et en agissant sur les paramètres de la lentille, par exemple sur la tension de l'électrode centrale. On agit ainsi sur la position des focales et du cercle de moindre diffusion, de manière à les amener successivement sur l'écran.

24. Image d'une droite parallèle à OX ou OY.

Soit (*fig.* 12) a la distance de Oz d'une droite perpendiculaire à OX. On a

$$\cos\theta_0 = \frac{a}{r_0}. \tag{103}$$

A la sortie de la lentille, la trajectoire de Gauss issue du point $P(\theta_0, r_0)$ sera de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} r_X = r_0 h(x, z)[1 + \varepsilon g(x, z)]\cos\theta_0, \\ r_Y = r_0 h(x, z)[1 - \varepsilon g(x, z)]\sin\theta_0. \end{array}\right. \tag{104}$$

(nous supposons ici que l'écran n'est pas placé au voisinage des focales) où $h(x, z)$, est une fonction calculable à partir de la structure de la lentille et de la position de l'écran.

Il résulte de (103) que l'on aura $r_X = \text{const.}$ et l'image sera constituée par une droite parallèle à OX. La même démonstration s'applique à une droite perpendiculaire à OY.

Si l'on considère un carré centré sur Oz et dont les côtés sont parallèles aux axes OX et OY et égaux à $2a$, on aura pour image un rectangle dont les côtés seront

$$2ah(x, z)[1 + \varepsilon g(x, z)] \quad \text{suivant } OX$$

et

$$2ah(x, z)[1 - \varepsilon g(x, z)] \quad \text{suivant } OY.$$

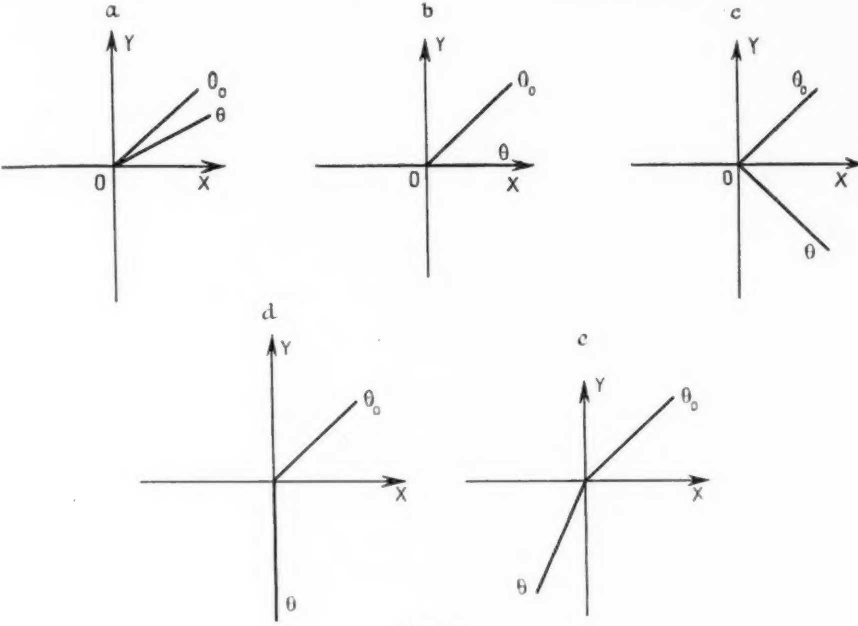


Fig. 11.

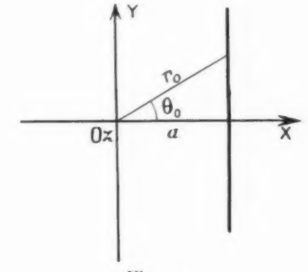


Fig. 12.

Pour g positif (x fort) l'ellipticité aura pour effet d'imprimer à tous les objets une extension suivant le grand axe de l'ellipse et une compression suivant le petit axe. Pour g négatif (x faible) le phénomène contraire pourra avoir lieu.

25. Image d'une droite quelconque.

Soit (*fig.* 13) une droite Δ définie par les éléments γ

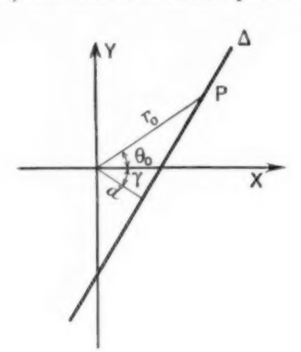


Fig. 13.

et d. En coordonnées polaires, l'équation de cette droite sera

$$r_0 = \frac{d}{\cos(\gamma + \theta_0)}. \tag{105}$$

Il résulte de ce qui précède que sa transformée aura pour équations

$$r_X = \frac{d}{\cos(\gamma + \theta_0)} h(x, z)[1 + \varepsilon g(x, z)] \cos\theta_0,$$
$$r_Y = \frac{d}{\cos(\gamma + \theta_0)} h(x, z)[1 - \varepsilon g(x, z)] \sin\theta_0$$

(nous supposons encore l'écran récepteur placé loin des focales) ou bien en coordonnées polaires

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= (1 - 2\varepsilon g)\operatorname{tg}\theta_0, \\ r &= \frac{d\,h(x, z)}{\cos(\gamma + \theta_0)}(1 + \varepsilon g \cos 2\theta_0). \end{aligned}\right. \tag{106}$$

On a ainsi une représentation paramétrique de l'image de la droite, le paramètre étant θ_0.

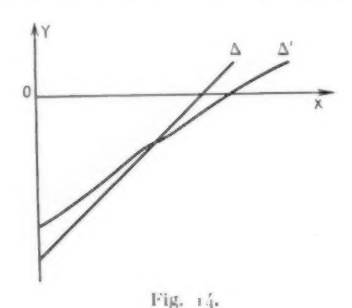


Fig. 14.

La figure 14 montre la transformée pour le cas où $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

QUELQUES ASPECTS PARTICULIERS DE LA LENTILLE PERTUBÉE.

26. Le miroir elliptique gaussien.

Les calculs effectués précédemment peuvent être étendus au miroir elliptique. En tenant compte des résultats obtenus dans la théorie du miroir électronique de révolution, on démontre aisément que les équations (37) et (41) régissant la marche de la trajectoire gaussienne dans les régions d'incidence et d'émergence restent valables dans le cas du miroir. Par contre, les équations (38) et (39) applicables à la région centrale, doivent être remplacées par

$$\left\{\begin{aligned} &(1 - \alpha'^2 z^2) r'' - \alpha'^2 z r' - \frac{\alpha'^2}{2} r \\ &\quad = \left[-\frac{\varepsilon\alpha'^2}{2}\cos 2\theta + (1 - \alpha'^2 z^2)\theta'^2\right] r, \\ &r(1 - \alpha'^2 z^2)\theta'' + [2r'(1 - \alpha'^2 z^2) - \alpha'^2 z r]\theta' \\ &\qquad - \frac{\varepsilon\alpha'^2}{2} r \sin 2\theta = 0 \end{aligned}\right. \tag{107}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} &(1 - \alpha'^2 z^2) r''_X - \alpha'^2 z r'_X - \frac{\alpha'^2}{2}(1 - \varepsilon) r_X = 0, \\ &(1 - \alpha'^2 z^2) r''_Y - \alpha'^2 z r'_Y - \frac{\alpha'^2}{2}(1 + \varepsilon) r_Y = 0 \end{aligned}\right. \tag{108}$$

respectivement.

Dans ces relations

$$\alpha'^2 = -\frac{p}{\Phi(0)} = \frac{1}{z_0}\sqrt{\frac{1}{k}\,\frac{x - 1}{x}} \qquad \text{avec} \quad x < 0. \tag{109}$$

En supposant que la réflexion des électrons a lieu dans la région centrale, les trajectoires gaussiennes dans le miroir elliptique seront alors

$$\left\{\begin{aligned} &\text{Région d'incidence :} \\ &r_X = r_0 \operatorname{ch}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sin}\beta(z + z_0)\right], \qquad r_Y = r_X. \\ &\text{Région centrale :} \\ &r_X = A_X \cos\left[\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{2}} \operatorname{arc\,ch}|\alpha' z| - \varphi_X\right]; \\ &r_Y = A_Y \cos\left[\sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{2}} \operatorname{arc\,ch}|\alpha' z| - \varphi_Y\right]. \\ &\text{Région d'émergence :} \\ &r_X = B_X \begin{matrix}\operatorname{ch}\\ \operatorname{sh}\end{matrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sin}\beta(z + z_0) - \psi_X\right]; \\ &r_Y = B_Y \begin{matrix}\operatorname{ch}\\ \operatorname{sh}\end{matrix}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sin}\beta(z + z_0) - \psi'\right], \end{aligned}\right. \tag{110}$$

avec

$$(111)\quad \begin{cases} A^2_{X,Y} = r_0^2 \dfrac{\cos^2}{\sin^2}\theta_0 (\operatorname{ch}^2\beta_0 + \lambda^2_{X,Y} \operatorname{sh}^2\beta_0), \\ \varphi_{X,Y} = \alpha'_{0X,Y} - \operatorname{arc\,tg} \lambda_{X,Y} \operatorname{th}\beta_0, \\ B^2_{X,Y} = A^2_{X,Y} \left| \cos^2(\alpha'_{0X,Y} + \varphi_{X,Y}) \right. \\ \qquad\qquad \left. - \dfrac{1}{\lambda^2_{X,Y}} \sin^2(\alpha'_{0X,Y} + \varphi_{X,Y}) \right|, \\ \psi_{X,Y} = \beta_0 - \operatorname{arc\,th} \dfrac{\frac{1}{\lambda_{X,Y}} \operatorname{tg}}{\lambda_{X,Y} \cot} (\alpha'_{0X,Y} + \varphi_{X,Y}). \end{cases}$$

Les équations (110) et (111) permettant le calcul numérique des trajectoires ainsi que l'établissement de formules explicites — analogues à celles établies dans le cas de la lentille — pour les caractéristiques optiques du miroir elliptique fonctionnant en régime gaussien.

Il est à prévoir que le miroir à deux électrodes — plaque portée à haute tension en face d'un trou au potentiel du sol — sera beaucoup moins affecté par les défauts d'ellipticité que le miroir à trois électrodes. En effet, par suite de la continuité de la plaque, la région située au voisinage de celle-ci, qui est la plus sensible du miroir, travaille en symétrie axiale dans le système à deux électrodes.

27. **Symétrie de répétition d'ordre** *m*.

Considérons une lentille électrostatique indépendante dont le trou central présente un défaut de symétrie d'ordre m. La relation (19) peut alors être généralisée sous la forme

$$(112)\quad \varphi(z, r, \theta) = \Phi(z) - \frac{r^2}{4}\Phi''(z)[1 - \varepsilon(z)\cos m\theta].$$

Nous allons supposer encore que ε est constant dans la région centrale et nul dans les régions extrêmes. Les équations gaussiennes de la trajectoire (25) deviennent alors dans la région centrale

$$(113)\quad \begin{cases} \Phi(z)r'' + \dfrac{1}{2}\Phi'(z)r' + \dfrac{1}{4}\Phi''(z)r \\ \qquad = \left[\dfrac{\varepsilon}{4}\Phi''(z)\cos m\theta + \Phi(z)\theta'^2\right] r, \\ r\Phi(z)\theta'' + \left[2r'\Phi(z) + \dfrac{r}{2}\Phi'(z)\right]\theta' \\ \qquad + \dfrac{m}{8}\varepsilon r \Phi''(z) \sin m\theta = 0. \end{cases}$$

En explicitant $\Phi(z)$ et en faisant le changement de variable

$$\alpha z = \operatorname{sh}\alpha\xi,$$

le système (113) devient

$$(114)\quad \begin{cases} r'' + \dfrac{\alpha^2}{2} r = \left(\dfrac{\varepsilon\alpha^2}{2}\cos m\theta + \theta'^2\right) r, \\ r\theta'' + 2r'\theta' + \dfrac{m}{4}\varepsilon\alpha^2 r \sin m\theta = 0. \end{cases}$$

Cherchons les solutions de la forme $\theta = \text{const.}$ Elles sont données par

$$(115)\quad \sin m\theta = 0,$$

soit

$$(116)\quad \theta = \theta_0 = \frac{n}{m}\pi,$$

n étant un nombre entier positif ou nul.

Le système aura m plans de symétrie et les trajectoires situées initialement dans un de ces plans de symétrie resteront *planes*. Toutes les autres trajectoires seront déviées de leur méridien d'incidence.

On peut obtenir des formules explicites pour le calcul de ces trajectoires planes. En effet, dans la région d'incidence on a affaire à une lentille ronde pour laquelle nous connaissons les solutions. Dans la région centrale, la première équation (114) fournit pour $\theta = \dfrac{n}{m}\pi$,

$$(117)\quad r'' + \frac{\alpha^2}{2}(1 \mp \varepsilon) r = 0,$$

d'où

$$(118)\quad r = A_n \cos\left[\sqrt{\frac{1 \mp \varepsilon}{2}} \operatorname{arc\,sh} \alpha z - \varphi_n\right],$$

les A_n et φ_n pouvant être déterminés par continuité.

Ainsi, les trajectoires situées dans les plans de symétrie sont entièrement déterminées. Elles peuvent être calculées numériquement en fonction de la structure de la lentille ronde et du paramètre ε, caractérisant la perturbation du champ.

Les trajectoires qui ne sont pas situées initialement dans un plan de symétrie, ne peuvent être déterminées d'une manière analytique, sauf pour le cas $n = 2$ (lentille elliptique). On peut le voir d'une manière simple, en multipliant la première des équations (114) par $e^{i\theta}$ et la deuxième par $ie^{i\theta}$ et en ajoutant les résultats. On trouve, en posant $u = re^{i\theta}$,

$$(119)\quad u'' + \frac{\alpha^2}{2} u = \varepsilon \frac{\alpha^2}{2} u \left(\cos m\theta - \frac{m}{2} i \sin m\theta\right).$$

L'équation (119) montre que lorsque $m = 2$ et dans ce cas seulement, on peut faire disparaître θ et obtenir une équation en u (60), résoluble analytiquement.

Les solutions analytiques trouvées dans les régions

d'incidence et d'émergence resteront toutefois valables. Il est possible alors de résoudre le problème à l'aide d'intégrations numériques effectuées dans la région centrale. On peut par exemple mettre la deuxième équation (114) sous la forme

$$\theta'' + 2\frac{r'}{r}\theta' + \frac{m}{4}\varepsilon\alpha^2 \sin m\theta = 0.$$

En dérivant, on a

$$(120)\qquad \theta''' + 2\frac{r'}{r}\theta'' + 2\left[\frac{r''}{r} - \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]\theta' + \frac{m}{4}\varepsilon\alpha^2 \sin m\theta = 0,$$

avec

$$(121)\qquad \frac{r'}{r} = \frac{-\theta'' - \dfrac{m}{4}\varepsilon\alpha^2 \sin m\theta}{2\theta'}$$

et

$$(122)\qquad \frac{r''}{r} = \frac{\alpha^2}{2}(\varepsilon \cos m\theta - 1) + \theta'^2.$$

La substitution fournit, en négligeant les termes en ε^2,

$$(123)\qquad \theta''' - \frac{3}{2}\frac{\theta''^2}{\theta'} + 2\theta'^3 - \alpha^2\theta' + \varepsilon\alpha^2\left(\theta' \cos m\theta - \frac{m}{4}\sin m\theta\right) = 0.$$

On a ainsi une équation où $r(z)$ ne figure plus et qu'on pourra résoudre par un procédé numérique convenable. Une fois en possession de $\theta(z)$, on calculera $r(z)$ par la relation (121).

Il résulte de ce qui précède qu'une lentille électrostatique dont le champ possède une symétrie de répétition d'ordre $m > 2$ ne possèdera pas de droites focales, mais des aires d'amincissement L'existence de droites focales peut donc être pris comme critérium d'ellipticité.

28. Lentille décentrée.

Les équations (112) et (114) restent applicables au cas $m = 1$, à condition d'y regarder ε comme le décentrage relatif $\varepsilon = \frac{e}{R_1}$, e étant la distance entre l'axe des électrodes extérieures, supposées alignées, et l'axe de l'électrode centrale. La lentille aura un seul plan de symétrie, le plan XOz passant par les deux axes mentionnés. Dans la région centrale de la lentille, les trajectoires situées dans ce plan seront données, de part et d'autre de OY par des expressions de la forme

$$(124)\qquad \begin{cases} r(0) = A(0)\cos\left[\sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{2}}\,\text{arc sh}\,\alpha z - \varphi(0)\right], \\ r(\pi) = A(\pi)\cos\left[\sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{2}}\,\text{arc sh}\,\alpha z - \varphi(\pi)\right]. \end{cases}$$

Dans un azimut quelconque, différent de 0 et π, la distance à l'axe de la trajectoire de Gauss sera, par suite de la variation en cos 1 θ du potentiel, comprise entre les valeurs extrêmes $r(0)$ et $r(\pi)$.

A la sortie de la lentille, les trajectoires cheminant dans le plan de symétrie seront de la forme

$$(125)\qquad \begin{cases} r(0) = r_c + \varepsilon g_c(x, z), \\ r(\pi) = r_c - \varepsilon g_c(x, z), \end{cases}$$

où r_c représente la trajectoire de Gauss dans la lentille centrée et εg_c un terme correctif, imputable au décentrage de l'électrode centrale. Si l'on fait subir maintenant à l'axe Oz une translation d'amplitude εg_c dans le plan XOz, $r(0)$ et $r(\pi)$ deviendront égaux — aux termes en ε^2 près — par rapport à ce nouvel axe de symétrie. Il résulte de ce qui précède que dans un azimut quelconque, la distance de la trajectoire de Gauss au nouvel axe de symétrie sera de la forme $r_c + \varepsilon^2 g_{c2}$. En particulier, au foyer gaussien ($r_c = 0$) elle sera $\varepsilon^2 g_{c2}$. Par conséquent, *le pouvoir séparateur de la lentille, qui était proportionnel à ε dans le cas de la lentille elliptique, est proportionnel à ε^2 dans le cas de la lentille décentrée*, comme le laissait déjà prévoir une analyse plus schématique [7]. Pour des valeurs courantes du décentrage relatif $\varepsilon = \frac{e}{R_1}$ (par exemple $\varepsilon = 0{,}01$), l'aggravation du pouvoir séparateur de la lentille, due au décentrage des électrodes est donc négligeable. Le seul effet pratique est un déplacement de l'image parallèlement à OX d'une quantité proportionnelle à ε.

29. Superposition de défauts de différents ordres.

Dans le cas où le trou de l'électrode centrale de la lentille est affecté de défauts de symétrie de différents ordres, le potentiel en dehors de l'axe sera de la forme

$$(126)\qquad \varphi(z, r, \theta) = \Phi(z) - \frac{r^2}{4}\Phi''(z) \times \left[1 - \sum_{1}^{m} \varepsilon_m(z)\cos m(\theta - \theta_m)\right].$$

Il est à remarquer que $\varepsilon_m(z)$ diminue lorsque m augmente car on tangente ainsi de plus en plus le cas de la symétrie de révolution.

Si l'on suppose que ε_m est nul dans les régions d'incidence et d'émergence, les équations différentielles des trajectoires gaussiennes dans ces régions seront celles que nous avons établies précédemment.

Dans la région centrale on aura, en supposant les ε_m constants,

$$(127)\quad \left\{\begin{aligned} &\Phi(z)r'' + \frac{1}{2}\Phi'(z)r' + \frac{1}{4}\Phi''(z)r \\ &\quad = \left[\frac{\Phi''(z)}{4}\sum_1^m \varepsilon_m \cos m(\theta - \theta_m) + \Phi(z)\theta'^2\right] r, \\ &r\Phi(z)\theta'' + \left[2r'\Phi(z) + \frac{r}{2}\Phi'(z)\right]\theta' \\ &\quad + \frac{\Phi''(z)}{8} r \sum_1^m m\,\varepsilon_m \sin(\theta - \theta_m) = 0. \end{aligned}\right.$$

En appliquant les transformations indiquées précédemment, ces deux équations deviennent

$$(128)\quad \left\{\begin{aligned} &r'' + \frac{\alpha^2}{2} r = \frac{\alpha^2}{2}\left[\sum_1^m \varepsilon_m \cos m(\theta - \theta_m) + \theta'^2\right] r, \\ &r\theta'' + 2r'\theta' + \frac{\alpha^2}{4} r \sum_1^m m\,\varepsilon_m \sin m(\theta - \theta_m) = 0. \end{aligned}\right.$$

Il y aura des plans de symétrie dans certains cas particuliers seulement. Exemple : Superposition de défauts d'ordre deux et quatre avec $\theta_2 = \theta_4$. Dans ce cas on aura des trajectoires planes dont on pourra établir des expressions analytiques. Dans le cas général d'une superposition quelconque il n'y aura pas de plans de symétrie et, par conséquent, pas de trajectoires planes. On pourra toutefois pousser jusqu'au bout la détermination des trajectoires à l'aide d'intégrations numériques. En éliminant par exemple r des deux équations (128), on aura l'équation en θ

$$(129)\quad \begin{aligned} &\theta''' - \frac{3}{2}\frac{\theta''^2}{\theta'} + 2\theta'^3 - \alpha^2\theta' \\ &\quad + \alpha^2\left[\theta' \sum_1^m \varepsilon_m \cos m(\theta - \theta_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}\sum_1^m m \sin m(\theta - \theta_0)\right] = 0 \end{aligned}$$

qu'on pourra résoudre par un procédé convenable d'intégration numérique.

30. Dispositifs employés pour combattre les effets de l'ellipticité.

Nous finirons cette étude du régime gaussien de la lentille elliptique par un rappel des principaux dispositifs proposés pour réduire les aberrations d'ellipticité :

1° Le premier en date est celui de Hillier [13]; il consiste dans l'emploi de vis magnétiques placées à l'intérieur même de la lentille;

2° Le dispositif de Bertein [1] est basé sur l'action de champs électriques — ou magnétiques — correcteurs produits par des électrodes placées à la sortie de la lentille;

3° L'étude exposée dans ces pages montre que l'aberration d'ellipticité longitudinale ou transversale est de la forme $\varepsilon j(x)$ (*fig.* 7 et 9). On peut alors :

α. déterminer la fonction $j(x)$ qui dépend de la structure de la lentille de manière à la rendre minimum. On y arrive en plaçant le point de fonctionnement au minimum de la courbe focale (*fig.* 1).

β. réduire ε en augmentant le trou de l'électrode centrale. On augmente $j(x)$ dans la même mesure tant que l'on reste en régime unipotentiel. Si, par contre, on applique une polarisation négative à l'électrode centrale, on peut ramener $j(x)$ à sa valeur initiale et les aberrations seront réduites dans le rapport de réduction de ε.

4° On peut enfin faire varier en fonction de l'azimut la distance z_0 entre électrodes de manière à suivre les variations de R_1 en fonction de l'azimut et à maintenir constant le rapport $\frac{z_0}{R_1}$.

L'étude expérimentale de ces différentes solutions est actuellement poursuivie au Laboratoire du Professeur P. Grivet, à l'École Normale Supérieure

APPENDICE I.

Calcul de Δf.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_Y} - \frac{1}{f_X} &= \frac{f_X - f_Y}{f_X f_Y} = \frac{\Delta f}{f^2} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}\left[\frac{\operatorname{ch}^2\beta_0 + \lambda_Y^2 \operatorname{sh}^2\beta_0}{\lambda_Y}\sin 2(\alpha_{0Y} - \gamma_{0Y})\right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{ch}^2\beta_0 + \lambda_X^2 \operatorname{sh}^2\beta_0}{\lambda_X}\sin 2(\alpha_{0X} - \gamma_{0X})\right]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &\frac{\operatorname{ch}^2\beta_0 + \lambda_X^2 \operatorname{sh}^2\beta_0}{\lambda_X} \\ &\quad = \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left[\operatorname{ch}^2\beta_0 + \lambda^2(1+\varepsilon)\operatorname{sh}^2\beta_0\right]}{\lambda} + \ldots \\ &\quad = \frac{\operatorname{ch}^2\beta_0 + \lambda^2 \operatorname{sh}^2\beta_0}{\lambda} + \frac{\lambda^2 \operatorname{sh}^2\beta_0 - \operatorname{ch}^2\beta_0}{2\lambda}\varepsilon \\ &\qquad + \text{termes en } \varepsilon^2 + \ldots. \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{ch}^2\beta_0+\lambda_Y^2\,\mathrm{sh}^2\beta_0}{\lambda_Y}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left[\mathrm{ch}^2\beta_0+\lambda^2(1-\varepsilon)\,\mathrm{sh}^2\beta_0\right]}{\lambda}+\ldots$$

$$=\frac{\mathrm{ch}^2\beta_0+\lambda^2\,\mathrm{sh}^2\beta_0}{\lambda}-\frac{\lambda^2\,\mathrm{sh}^2\beta_0-\mathrm{ch}^2\beta_0}{2\lambda}\varepsilon$$

$$+\text{ termes en }\varepsilon^2+\ldots.$$

Il vient donc

$$\frac{\Delta f}{f^2}=\frac{\beta}{\sqrt{2}}\Bigg\{\frac{\mathrm{ch}^2\beta_0+\lambda^2\,\mathrm{sh}^2\beta_0}{\lambda}$$

$$\times\left[\sin 2(\alpha_{0Y}-\gamma_{0Y})-\sin 2(\gamma_{0X}-\alpha_{0X})\right]$$

$$+\varepsilon\,\frac{\mathrm{ch}^2\beta_0-\lambda^2\,\mathrm{sh}^2\beta_0}{2\lambda}$$

$$\times\left[\sin 2(\alpha_{0Y}-\gamma_{0Y})+\sin 2(\alpha_{0X}-\gamma_{0X})\right]\Bigg\}$$

$$+\text{ termes en }\varepsilon^2.$$

Les quantités entre crochets s'écrivent

$$C=\sin 2(\alpha_{0Y}-\gamma_{0Y})-\sin 2(\alpha_{0X}-\gamma_{0X})$$

$$=2\sin(\alpha_{0Y}-\alpha_{0X}-\gamma_{0Y}+\gamma_{0X})$$

$$\times\cos(\alpha_{0Y}+\alpha_{0X}-\gamma_{0Y}-\gamma_{0X}),$$

$$D=\sin 2(\alpha_{0Y}-\gamma_{0Y})+\sin 2(\alpha_{0X}-\gamma_{0X})$$

$$=2\sin(\alpha_{0Y}+\alpha_{0X}-\gamma_{0Y}-\gamma_{0X})$$

$$\times\cos(\alpha_{0Y}-\alpha_{0X}-\gamma_{0Y}+\gamma_{0X}).$$

Mais

$$\alpha_{0Y}+\alpha_{0X}=\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha_0+\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha_0=2\alpha_0,$$

$$\alpha_{0Y}-\alpha_{0X}=\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha_0-\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha_0=\varepsilon\alpha_0,$$

$$\gamma_{0Y}+\gamma_{0X}=\operatorname{arc\,tg}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\lambda\,\mathrm{th}\,\beta_0$$

$$+\operatorname{arc\,tg}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\lambda\,\mathrm{th}\,\beta_0=2\gamma_0.$$

$$\gamma_{0Y}-\gamma_{0X}=\operatorname{arc\,tg}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\lambda\,\mathrm{th}\,\beta_0$$

$$-\operatorname{arc\,tg}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\lambda\,\mathrm{th}\,\beta_0$$

$$=-\operatorname{arc\,tg}\varepsilon\frac{\lambda\,\mathrm{th}\,\beta_0}{1+\lambda^2\,\mathrm{th}^2\beta_0}\sim-\frac{\varepsilon}{2}\sin 2\gamma_0.$$

Il en résulte

$$C=2\sin\left(\varepsilon\alpha_0+\frac{\varepsilon}{2}\sin 2\gamma_0\right)\cos(2\alpha_0-2\gamma_0)$$

$$\sim\varepsilon(2\alpha_0+\sin 2\gamma_0)\cos 2(\alpha_0-\gamma_0),$$

$$D=2\sin(2\alpha_0-2\gamma_0)\cos\left(\varepsilon\alpha_0+\frac{\varepsilon}{2}\sin 2\gamma_0\right)$$

$$\simeq 2\sin 2(\alpha_0-\gamma_0).$$

En effectuant les substitutions, on trouve finalement la relation (50).

APPENDICE II.

Calcul de Δz_F.

La relation (13) donnant l'abscisse du foyer permet d'écrire immédiatement dans les deux plans de symétrie

$$z_{FX}=z_0+\frac{f_X}{2\lambda_X}\sqrt{4\lambda_X^2+(\lambda_X^2+1)^2\,\mathrm{sh}^2 2\beta_0}\,\sin 2(\alpha_{0X}+\delta_{0X}),$$

$$z_{FY}=z_0+\frac{f_Y}{2\lambda_Y}\sqrt{4\lambda_Y^2+(\lambda_Y^2+1)^2\,\mathrm{sh}^2 2\beta_0}\,\sin 2(\alpha_{0Y}+\delta_{0Y}),$$

avec

$$\mathrm{tg}\,2\delta_{0X}=\frac{2\lambda_X}{\lambda_X^2-1}\,\frac{1}{\mathrm{th}\,2\beta_0},$$

$$\mathrm{tg}\,2\delta_{0Y}=\frac{2\lambda_Y}{\lambda_Y^2-1}\,\frac{1}{\mathrm{th}\,2\beta_0}.$$

On a dès lors

$$\Delta z_F=z_{FX}-z_{FY}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{f_X}{\lambda_X}\sqrt{4\lambda_X^2+(\lambda_X^2+1)^2\,\mathrm{sh}^2 2\beta_0}\,\sin 2(\alpha_{0X}+\delta_{0X})\right.$$

$$\left.-\frac{f_Y}{\lambda_Y}\sqrt{4\lambda_Y^2+(\lambda_Y^2+1)^2\,\mathrm{sh}^2 2\beta_0}\,\sin 2(\alpha_{0Y}+\delta_{0Y})\right].$$

En développant les radicaux en série de ε, on a

$$\sqrt{4\lambda_X^2+(\lambda_X^2+1)^2\,\mathrm{sh}^2 2\beta_0}=\sqrt{E}\,(1+\varepsilon F),$$

$$\sqrt{4\lambda_Y^2+(\lambda_Y^2+1)^2\,\mathrm{sh}^2 2\beta_0}=\sqrt{E}\,(1-\varepsilon F),$$

avec

$$E=4\lambda^2+(\lambda^2+1)^2\,\mathrm{sh}^2 2\beta_0,$$

$$F=\frac{\lambda^2}{E}\left[2-(\lambda^2+1)\,\mathrm{sh}^2 2\beta_0\right].$$

En outre, aux termes en ε^2 près, on peut poser

$$f_X=f+\frac{\Delta f}{2},$$

$$f_Y=f-\frac{\Delta f}{2}.$$

Il vient dans ces conditions

$$z_{FX}-z_{FY}=\frac{1}{2\lambda}\sqrt{E}\,f\left\{\left[1+\varepsilon\left(F+\frac{1}{2}\right)\right]\sin 2(\alpha_{0X}+\delta_{0X})-\left[1-\varepsilon\left(F+\frac{1}{2}\right)\right]\sin 2(\alpha_{0Y}+\delta_{0Y})\right\}$$

$$+\frac{1}{4\lambda}\sqrt{E}\,\Delta f\left\{\left[1-\varepsilon\left(F+\frac{1}{2}\right)\right]\sin 2(\alpha_{0X}+\delta_{0X})+\left[1-\varepsilon\left(F+\frac{1}{2}\right)\right]\sin 2(\alpha_{0Y}+\delta_{0Y})\right\}+\text{ termes en }\varepsilon^2.$$

$$=\frac{\sqrt{E}}{2\lambda}\,f\left\{\sin 2(\alpha_{0X}+\delta_{0X})-\sin 2(\alpha_{0Y}+\delta_{0Y})+\varepsilon\left(F+\frac{1}{2}\right)\left[\sin 2(\alpha_{0X}+\delta_{0X})+\sin 2(\alpha_{0Y}+\delta_{0Y})\right]\right\}$$

$$+\frac{\sqrt{E}}{4\lambda}\,\Delta f\left[\sin 2(\alpha_{0X}+\delta_{0X})+\sin 2(\alpha_{0Y}+\delta_{0Y})\right]+\text{ termes en }\varepsilon^2.$$

Dans les égalités

$$\overline{C} = \sin 2(\alpha_{0X} + \delta_{0X}) - \sin 2(\alpha_{0Y} + \delta_{0Y})$$
$$= 2 \sin(\alpha_{0X} - \alpha_{0Y} + \delta_{0X} - \delta_{0Y})$$
$$\times \cos(\alpha_{0X} + \alpha_{0Y} + \delta_{0X} + \delta_{0Y}),$$

$$\overline{D} = \sin 2(\alpha_{0X} + \delta_{0X}) + \sin 2(\alpha_{0Y} + \delta_{0Y})$$
$$= 2 \sin(\alpha_{0X} + \alpha_{0Y} + \delta_{0X} + \delta_{0Y})$$
$$\times \cos(\alpha_{0X} - \alpha_{0Y} + \delta_{0X} - \delta_{0Y}),$$

on peut faire les substitutions

$$\alpha_{0X} + \alpha_{0Y} = 2\alpha_0,$$
$$\alpha_{0X} - \alpha_{0Y} = -\varepsilon\alpha_0,$$
$$\delta_{0X} + \delta_{0Y} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\lambda_X}{\lambda_X^2 - 1} \frac{1}{\operatorname{th} 2\beta_0}$$
$$+ \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\lambda_Y}{\lambda_Y^2 - 1} \frac{1}{\operatorname{th} 2\beta_0} = 2\delta_0,$$

$$\delta_{0X} - \delta_{0Y} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\lambda_X}{\lambda_X^2 - 1} \frac{1}{\operatorname{th} 2\beta_0}$$
$$- \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\lambda_Y}{\lambda_Y^2 - 1} \frac{1}{\operatorname{th} 2\beta_0}$$
$$= -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \varepsilon \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \frac{\operatorname{tg} 2\delta_0}{1 + \operatorname{tg}^2 2\delta_0}$$
$$\simeq -\frac{\varepsilon}{4} \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \sin 4\delta_0,$$

ce qui fournit

$$\overline{C} = -2 \sin\left(\varepsilon\alpha_0 + \frac{\varepsilon}{4} \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \sin 4\delta_0\right) \cos 2(\alpha_0 + \delta_0)$$
$$\simeq -\varepsilon \left(2\alpha_0 + \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \frac{\sin 4\delta_0}{2}\right) \cos 2(\alpha_0 + \delta_0),$$
$$\overline{D} = 2 \sin 2(\alpha_0 + \delta_0) \cos\left(\varepsilon\alpha_0 + \frac{\varepsilon}{4} \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \sin 4\delta_0\right)$$
$$\simeq 2 \sin 2(\alpha_0 + \delta_0).$$

En faisant les substitutions, on trouve la relation (52).

BIBLIOGRAPHIE.

1. F. Bertein, *Annales de Radioélectricité*, t. 2, 1947, p. 379-408; t. 3, 1948, p. 49-62.
2. W. Glaser, *Zeits Physik*, t. 120, 1943, p. 1-15.
3. F. Bertein, H. Bruck et P. Grivet, *Annales de Radioélectricité*, t. 2, 1947, p. 249-253.
4. J. Hillier et J. Ramberg, *J. Appl. Physics*, janvier 1947, p. 48-71.
5. P. A. Sturrock, *Proc. of the Conference on Electron Microscopy*, Delft, 1947, p. 89-93.
6. O. Scherzer, *Optik*, juillet 1949, p. 114-132 et *Congrès International de Microscopie Électronique*, Paris, 1950.
7. E. Regenstreif, *Annales de Radioélectricité*, t. 6, 1951, p. 51-83 et t. 6, 1951, p. 114-155.
8. P. Grivet, *Advances in Electronics*, t. II, Academic Press Inc. New-York, 1950.
9. M. Cotte, *C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 377-379.
10. H. Bruck, R. Remillon et L. Romani, *C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 650-652.
11. O. Rang, *Optik*, t. 2 3, 1948, p. 251-257.
12. F. Heise, *Optik*, t. 8 9, 1949, p. 479-489.
13. J. Hillier, *J. Appl. Physics*, t. 17, 1946, p. 411-419.

L'EXPLOITATION DES STUDIOS DE RADIODIFFUSION ET LE NOUVEAU MATÉRIEL DE LA S. F. R.

PAR MM. CORDONNIER,

Ingénieur-Conseil à la Société française Radioélectrique.

ET BERNARD,

Ingénieur au Service Technique Basse fréquence de la S.F.R.

SOMMAIRE. — *Depuis vingt-cinq années, les installations techniques des studios de radiodiffusion n'ont cessé de se perfectionner. Tandis que l'évolution scientifique permettait d'améliorer chaque jour les performances du matériel, l'expérience des exploitants intervenait pour guider les constructeurs vers des formules mieux adaptées aux besoins.*

Parallèlement, l'augmentation continue du nombre de programmes diffusés entraînait une extension considérable des studios et, de ce fait, tendait à rendre prohibitives des dépenses d'équipement et d'exploitation restées relativement modestes à l'origine.

Il devenait dès lors nécessaire de rechercher des solutions propres à diminuer non seulement le prix de revient des installations, mais aussi et peut-être plus encore, les frais d'exploitation.

Le présent exposé se propose de définir les besoins des studios de radiodiffusion, de rappeler brièvement les solutions techniques employées jusqu'ici pour les satisfaire et de décrire ensuite la conception et les types de matériel proposés par la Société française Radioélectrique pour remplir simultanément les conditions essentielles de qualité et de rendement (C.D.U. 654).

SUMMARY. — *During the last twentyfive years, the technical equipment of broadcasting studios has unceasingly advanced. Whilst scientific progress enabled improvement in the performances of the equipment, the experience gained by operators guided the constructors in designing apparatus better suited to operational requirements.*

At the same time, the steady increase in the number of programmes broadcast necessitated a considerable extension of the studios and, consequently, tended to render prohibitive the capital cost of the installation as well as the running costs, both of which had remained within reasonable limits at the outset.

It therefore became necessary to find solutions which would not only diminish the cost of installation but also, and more particularly, reduce the running costs.

The present article proposes to define the requirements of broadcasting studios, to recall briefly the technical solutions hitherto adopted to comply with them, and to describe the lay-out and the types of equipment proposed by the Société Française Radio-Electrique to satisfy at the same time the essential conditions of qualit y and efficiency (U.D.C. 654).

1. L'exploitation des studios de radiodiffusion.

A l'échelon national, un réseau de radiodiffusion se propose généralement un double but : desservir la totalité des habitants du pays et, dans toute la mesure du possible, leur donner le choix entre plusieurs programmes. En conséquence, la couverture du territoire est assurée par un certain nombre d'émetteurs diffusant, tantôt isolément, tantôt groupés en « chaîne », des programmes distincts.

Ceux-ci sont réalisés dans des centres de studios situés dans des villes qui, par leur activité politique, économique, intellectuelle et artistique, permettent la réalisation de programmes attrayants et variés.

1.1. Installations centrales. — Aux débuts de la radiodiffusion, les centres basse fréquence ([1]) une cabine spéciale, affectée à chaque studio et consacrée au travail de la prise de son (*fig.* 2).

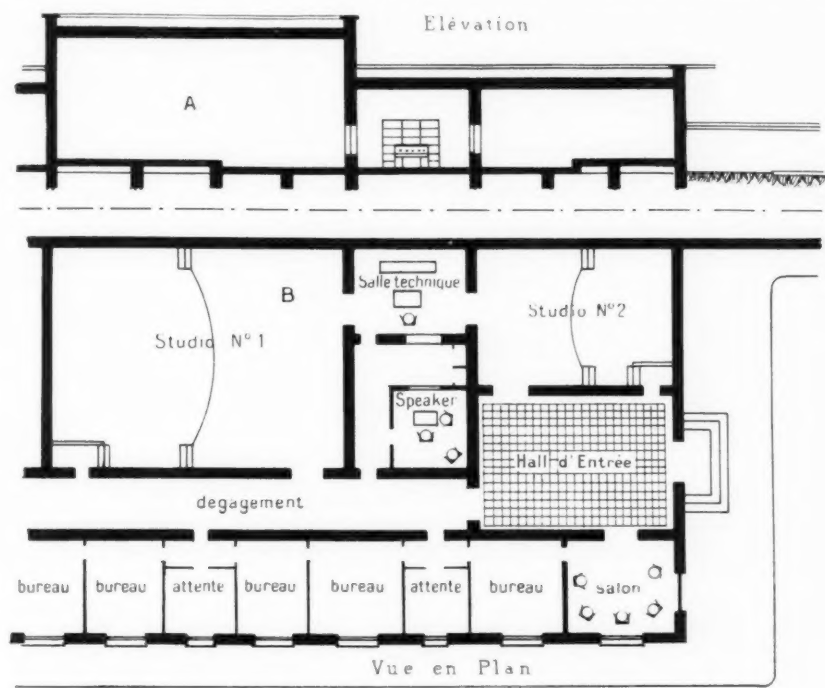


Fig. 1. — Installation centrale : Salle technique desservant trois studios. A. Vue en coupe; B. Vue en plan.

étaient assez simplistes. Les studios, généralement peu nombreux, étaient reliés à une salle technique centrale unique à partir de laquelle on effectuait tous les réglages microphoniques, avec ou sans visibilité sur les studios (*fig.* 1).

Très rapidement, ce mode d'exploitation se révéla peu commode. Même dans les centres réalisant un programme unique, l'introduction des enregistrements et la nécessité de contrôler en répétition les réglages microphoniques rendirent impraticables les installations centralisées.

Dans la salle technique, le contrôle simultané de plusieurs studios travaillant en émission, répétition ou enregistrement ne pouvait s'effectuer qu'au casque, dans des conditions très défecteuses.

1.2. Cabines de prises de son. — Un élément intermédiaire fut alors introduit entre les exécutants du studio et le technicien de la salle centrale :

Fig. 2. — Cabine de prise de son.
Perspective axonométrique d'un studio et de ses locaux annexes : cabine de prise de son; cabine d'audition; cabine speaker.

([1]) Ainsi appelés parce qu'ils contenaient les équipements électroacoustiques ou de « basse fréquence ».

Toutes les questions relatives au choix des microphones, à leur mélange, au réglage du niveau de modulation, furent dès lors réglées dans ces cabines dites de « prise de son » par un spécialiste ayant vers le studio une bonne visibilité et un accès facile.

Certaines installations conservèrent leur caractère centralisé, défini par le groupement dans la salle technique de presque tous les amplificateurs et organes de commutation, le matériel installé dans les cabines de prise de son, se limitant aux préamplificateurs microphoniques et aux atténuateurs-mélangeurs. (Installation de la B.B.C. à Londres et studios français avant 1939.)

1.3. Installations décentralisées. — D'autres installations, au contraire, évoluèrent vers une décentralisation presque totale. Chaque studio et sa cabine de prise de son constituèrent un ensemble autonome disposant d'une chaîne électroacoustique complète : préamplificateurs, mélangeurs, amplificateurs de ligne et d'écoute, modulomètre pour le contrôle de niveau.

De telles cabines pouvaient donc travailler de façon totalement indépendante pour les répétitions ou enregistrements, leur liaison avec l'installation générale se limitant, en cas d'émission, à une commutation de leur sortie de modulation vers la ligne reliée à l'émetteur désiré.

Ce type d'installation a été réalisé à Bruxelles en 1936 à l'I.N.R. ou chaque cabine de studio disposait d'un équipement autonome complet et pouvait, au moyen de manœuvres automatiques, se relier elle-même, à l'heure fixée, à l'émetteur choisi.

Ce mode d'exploitation extrêmement souple est parfaitement défendable au point de vue économique dès que les studios sont utilisés de façon intensive. La décentralisation, dans ce cas, n'exige en effet pas plus de matériel amplificateur et l'installation se prête beaucoup mieux à des modifications ou extensions.

L'application intégrale de la méthode comporte toutefois un inconvénient : le programme d'un émetteur donné, formé d'éléments réalisés successivement dans différents studios, n'est plus contrôlé dans sa continuité.

Or, il est indispensable, indépendamment de toute question de réglage microphonique, qu'une même personne contrôle le programme complet envoyé aux auditeurs et, en particulier, les enchaînements.

1.4. Installations mixtes. — On tend alors vers des installations mixtes, qui conservent le caractère autonome des studios dont les cabines de prise de son possèdent toujours une chaîne élec-

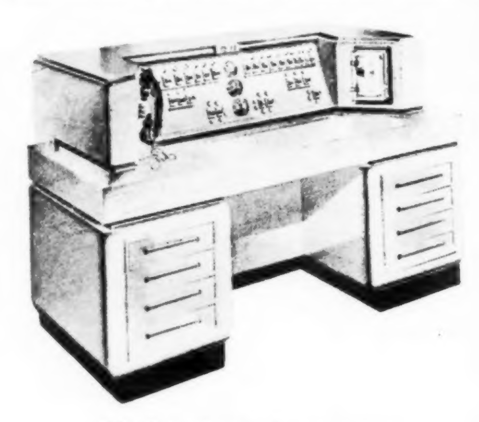


Fig. 3. — Console de programme.

troacoustique complète, mais dans lesquelles la composition et le contrôle de la continuité de chaque programme se font distinctement dans des pièces spécialisées dites *cabines de programme* (*fig.* 3).

Ces dernières disposent des organes de commutation, exécutent les enchaînements d'un studio à un autre, de l'extérieur à l'intérieur, et les deux fonctions « prise de son » et « contrôle du programme » sont confiées à des responsables distincts, que l'on peut donc spécialiser. Dans de très grands centres, cette solution est certainement la meilleure.

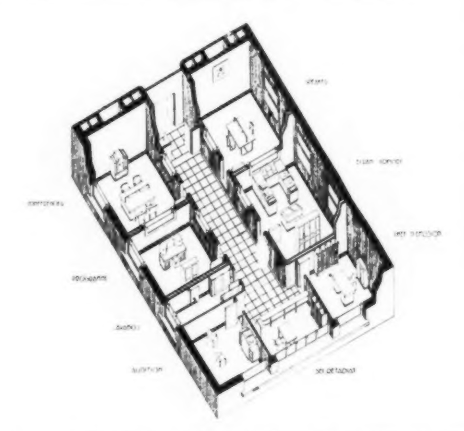


Fig. 4. — Perspective axonométrique d'un groupe complet (lambda) affecté au contrôle d'un programme.
Groupe speaker-musique enregistrée; cabine conférencier; cabine de programme.

Une telle organisation est malheureusement très coûteuse en personnel, puisqu'il faut à tout moment

au minimum trois personnes pour le contrôle de chaque chaîne d'émetteurs (prise de son, cabine de programme, salle technique), soit une équipe de six à neuf personnes pour assurer la permanence quotidienne (*fig.* 4 et 5).

2. La répartition des responsabilités et les économies de personnel.

Lorsqu'on établit les horaires de travail du personsonnel technique assurant l'exploitation d'un

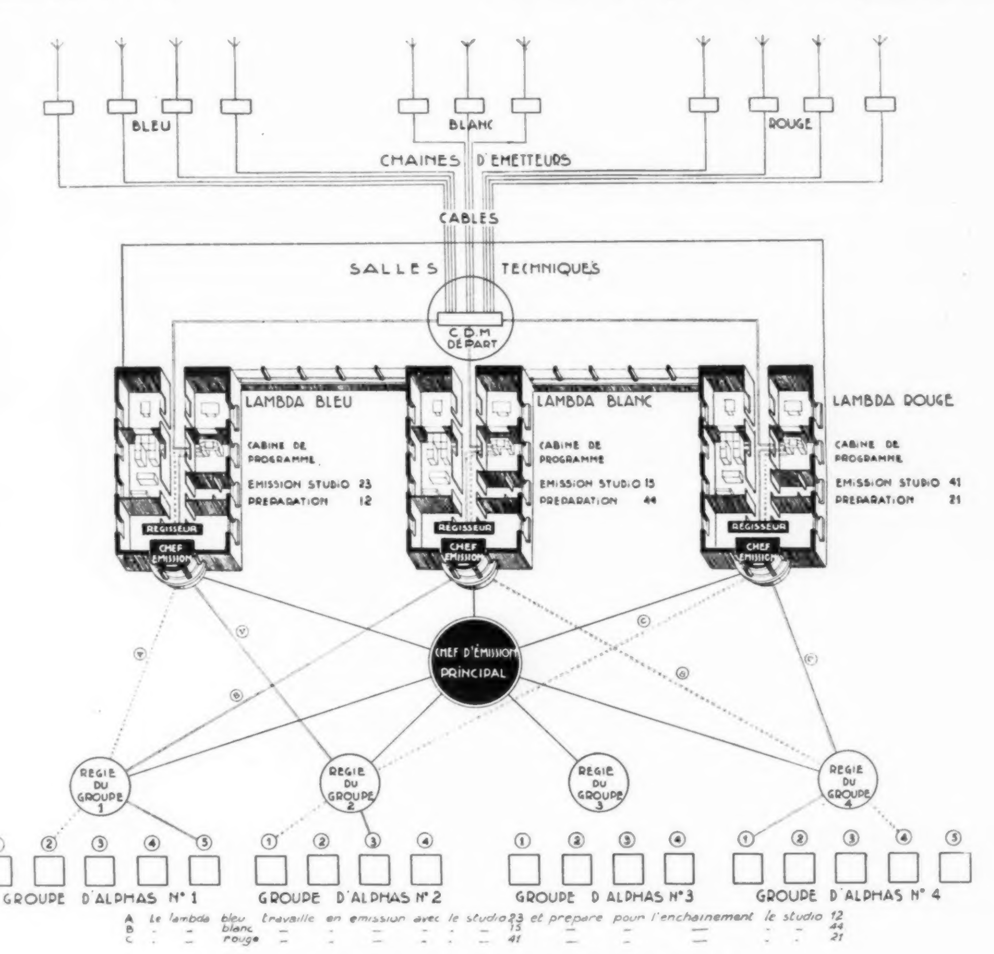


Fig. 5. — Principe d'exploitation d'une installation mixte.

Chaque studio forme avec sa cabine de prise de son un « alpha » équipé d'une chaîne électroacoustique complète. Chaque programme est contrôlé dans un « lambda ». La cabine de programme réalise l'enchaînement d'une modulation à l'autre en prenant, par manœuvres automatiques, la sortie des consoles de prise de son des alphas.

Quoique plus rationnelle, l'installation mixte complète constitue donc un luxe coûteux. Il est donc intéressant de rechercher une solution permettant de conserver les avantages essentiels de l'installation mixte, tout en réalisant des économies d'exploitation. C'est dans cet esprit que la S.F.R. a entrepris l'étude de ses nouveaux ensembles électroacoustiques.

centre, on est amené aux constatations suivantes :

a. La salle technique qui assure les liaisons téléphoniques avec les émetteurs et groupe les organes de communications, les amplificateurs d'arrivée et de départ et les distributeurs d'écoute, nécessite un premier opérateur;

b. L'organisation des répétitions, émissions, enre-

gistrements, conduit à établir une sorte de planning d'occupation des studios, avec affectations correspondantes d'un spécialiste de la prise de son pour chaque opération;

c. Les cabines de programmes nécessitent la présence permanente d'un technicien.

D'autre part, ces dernières au cours de leurs enchaînements font constamment intervenir le « speaker » et la musique enregistrée, si bien que, finalement, un groupe comprenant : studio de parole et cabine de prise de son avec lecteurs de films et de disques, doit être associé à chaque cabine de programme.

mettra d'assurer aisément deux fonctions complémentaires : enchaînement du programme et prise de son du studio « speaker-musique enregistrée ».

Le déroulement de l'émission ne peut que gagner à cette centralisation et l'économie d'une équipe de trois personnes entraîne une amélioration appréciable de la productivité du centre.

3. Conception des nouveaux équipements de studios de la S.F.R.

L'étude d'un matériel réellement adapté aux besoins suppose l'adoption préalable d'une doctrine d'exploitation et nous avons vu que le choix judicieux

	Prise de son dans les studios.	Groupe speaker-musique enregistrée (écrans sonores).	Cabines de programmes.	Salle technique.
Programme I (national)	8 à 10 spécialistes de la prise de son assurant, suivant le planning d'occupation des studios, le contrôle des répétitions, émissions, enregistrements	3 (permanence)	3 (permanence)	3 techniciens (permanence)
Programme II (régional)		3	3	
Programme III (international)		3	3	
Total	10	9	9	3

Total général : 31 personnes, non compris le personnel de maitrise. Sur ce total, 9 personnes peuvent être économisées pour le groupement cabine de programme-écran sonore.

Fig. 6. — Tableau du personnel minimum nécessaire pour assurer une exploitation mixte (trois programmes).

Si ces deux éléments sont seulement reliés électriquement, la présence permanente d'un technicien sera, en outre, pratiquement nécessaire dans la cabine de son du groupe speaker-musique enregistrée (l'écran sonore des postes privés).

L'ensemble conduit en fait à utiliser à tout moment quatre personnes pour le contrôle d'un seul programme, soit, avec les horaires habituels des postes de radiodiffusion et la récupération des dimanches et jours fériés, une équipe de dix à douze personnes pour assurer la permanence complète (*fig.* 6).

La suppression des cabines de prise de son ou de la salle technique ne peut être envisagée et l'expérience montre la nécessité permanente d'un technicien au groupe « speaker-musique enregistrée ». La solution idéale conservant l'avantage du contrôle continu du programme, est de confier à ce même technicien l'exploitation d'un matériel qui lui per-

de cette dernière permet d'assurer les émissions dans les meilleures conditions avec le minimum de personnel.

Une analyse attentive des besoins des exploitants permet de réaliser des économies non moins importantes dans le domaine du matériel.

3.1. Consoles de prise de son. — La pratique a consacré l'usage, dans les cabines de prise de son, de consoles ou consolettes groupant les différents organes nécessaires au mélange microphonique et au réglage du niveau.

Ces consoles sont généralement associées à des lecteurs de disques qui font parfois partie intégrante du meuble-console proprement dit, les amplificateurs étant cependant, dans la plupart des cas, montés sur un bâti séparé (*fig.* 7).

L'utilisation de consoles monobloc présente des inconvénients depuis l'introduction des enregis-

trements sur bande magnétique dont l'emploi est de plus en plus fréquent aujourd'hui. Disques et films sont alors concurremment utilisés à la prise de son, en proportions variables suivant l'affectation du studio.

Il est donc préférable de réaliser des ensembles conçus pour s'assembler de façon harmonieuse, mais conservant l'autonomie des éléments constituants : console de son proprement dite, tourne-disques, lecteurs de films, qui peuvent ainsi être réunis en proportions variables suivant les besoins.

Par ailleurs, l'étude des éléments du prix de revient montre que :

— directement et indirectement les dépenses augmentent évidemment avec le volume du matériel et nous le préciserons plus loin;

— les exploitants, en exigeant de chaque ensemble les possibilités les plus diverses, ont alourdi considérablement les prix sans obtenir toujours des avantages correspondants;

— les possibilités de vente du matériel basse fréquence étant limitées, les constructeurs n'obtiendront des prix de revient intéressants qu'en limitant le nombre de modèles et en augmentant leur souplesse d'adaptation aux utilisations les plus variées.

3.1.1. *Volume du matériel.* — Si l'on demande à un architecte combien coûtera, approximativement, la construction d'un bâtiment, il calcule son volume et le multiplie par un certain prix au mètre cube.

Il en est un peu de même, directement et indirectement, pour le matériel. S'il est désirable, en effet, que les cabines de prise de son soient vastes, toute place inutilement occupée entraîne finalement une majoration du prix du bâtiment. Tout élément inutile ou rarement employé est donc nuisible et il conviendra de limiter les possibilités du matériel pour les adapter aux besoins réels. Ceux-ci ayant été déterminés, on réalisera une économie très importante en groupant dans la console les organes de mélange et les amplificateurs.

L'emploi d'un bâti séparé coûte par lui-même, exige une place supplémentaire dans la cabine, nécessite des caniveaux et un câblage onéreux, entraîne des délais d'installation gênants et rend l'ensemble de prise de son inamovible.

Sous réserve d'une réalisation permettant l'accès facile des différents organes pour l'entretien et le rechange, il se dégage donc une conception différente du groupement des éléments constituant l'équipement des cabines : les lecteurs films et pisques seront adaptés à la console mais indépendants, cependant que les amplificateurs et leurs alimentations seront groupés dans la console proprement dite.

3.1.2. *Rendement d'exploitation.* — Les producteurs de programmes tirant volontiers parti de toutes les possibilités de la technique, les exploitants ont fini par considérer que chaque studio devait comporter toutes les possibilités.

Il y a là une tendance contre laquelle il faut réagir. Si, à partir du minimum indispensable, l'on examine en effet, d'une part, le prix de revient de chaque adjonction nouvelle, d'autre part, son pourcentage d'utilisation probable, on constate que certaines adjonctions coûtent très cher et ne servent presque jamais (le dispositif d'écho artificiel en est un exemple).

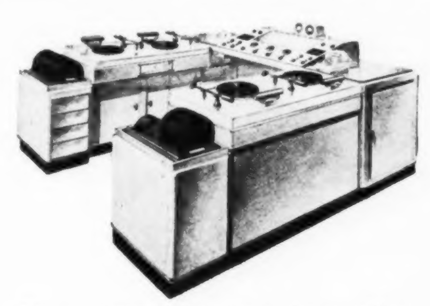


Fig. 7. — Console de prise de son monobloc.

Si les usagers calculaient les dépenses indirectes qu'entraînent certaines de leurs demandes et s'ils établissaient leur prix de revient horaire en tenant compte du temps d'utilisation effectif, ils abandonneraient eux-mêmes une bonne partie de leurs exigences.

Ils s'orienteraient alors vers une solution plus logique : l'équipement de la majorité des studios à l'aide d'un matériel « moyen », capable de répondre aux besoins courants et la spécialisation de quelques studios particuliers en vue des réalisations exigeant de grosses possibilités techniques.

Dotées d'équipements plus complets, les cabines de ces studios seraient confiées à des spécialistes particulièrement adroits dans les travaux de prise de son.

Une méthode analogue est appliquée depuis longtemps dans les studios de cinéma qui distinguent l'enregistrement normal, effectué avec un matériel simplifié, du réenregistrement ou « mélange » exécuté par des virtuoses avec tous les moyens techniques désirables : nombreuses voies de mélange, correcteurs et filtres appropriés.

3.1.3. *Souplesse du matériel et limitation du nombre de modèles.*— La diversité des programmes réalisés dans les studios de radiodiffusion rend cependant difficile la définition d'un matériel moyen standard susceptible de s'adapter à tous les besoins.

La chaîne électroacoustique élémentaire est évidemment toujours nécessaire, mais le nombre de microphones, tourne-disques, lecteurs de films, varie suivant les studios.

La solution la plus simple consiste donc à prévoir un certain nombre de « voies d'amplification » principales non spécialisées dont l'affectation est déterminée en fonction de l'utilisation, avec l'adjonction éventuelle de correcteurs ou filtres.

Quelques voies auxiliaires, également non spécialisées, peuvent être adjointes pour les modulations à niveau élevé, telles que retransmission, relais ou lecture d enregistrement comportant déjà une préamplification.

On dispose dans ce cas d'une cellule standard : la console de prise de son proprement dite, à laquelle on adjoint en proportions variables des éléments indépendants : microphones, tourne-disques, lecteurs de films (*fig.* 8).

Sous réserve d'une étude appropriée de ces derniers, l'équipement d'ensemble des cabines de prise de son gagnera en souplesse sans perdre les qualités de présentation auxquelles les exploitants se sont toujours montrés très attachés.



Fig. 8. — Consolette de prise de son S.F.R. avec table tourne-disques indépendante.

3.2. Consoles de programmes. — L'utilisation d'une même personne pour le contrôle du groupe « speaker-disques et films » et l'enchaînement des programmes conduit naturellement à l'adaptation d'une console de prise de son au travail de commutation des studios.

Dans le passé, ce dernier a généralement été effectué au moyen de clés d'enclenchement et de signalisation, chaque groupe de clés correspondant à une modulation (*fig.* 3).

Un tel système présente plusieurs inconvénients :

— il ne se prête pas aux extensions. Le nombre de modulations à commuter doit être déterminé une fois pour toutes pour un centre et l'on est amené, soit à négliger l'avenir, soit à réaliser à l'origine des installations inutilement compliquées;

— l'encombrement des clés et des relais qui leur correspondent dans la console est important. Il devient prohibitif s'il y a plus de 20 sources de modulations, et l'on est alors obligé d'utiliser des clés de dizaines, ce qui ne simplifie pas l'installation et la manipulation;

— un câblage important est nécessaire entre les consoles de programmes et le bâti à relais principal, généralement situé dans la salle technique.

Désirant à la fois réduire les prix de revient et assouplir le matériel, la S.F.R. s'est orientée vers une autre solution qui évite les inconvénients précédents

tout en permettant l'utilisation des consoles de prise de son.

La commande par clés est abandonnée et remplacée par un cadran du type téléphonique actionnant un autocommutateur qui branche directement les relais de commutation, l'ensemble étant contenu dans un bâti unique.

Chaque cabine de programme n'est plus reliée à la salle technique que par un nombre de fils limités, correspondant au cadran proprement dit et à deux clés de signalisation (studio en service et studio en préparation).

Grâce à un système de numérotation particulier, le dispositif sélecteur comprend un nombre de relais très faible; en conséquence, l'ensemble d'enclenchement automatique est comparable, en valeur réelle, au bâti de relais précédemment utilisé. Il y a donc économie sur le tableau de clés, les relais de console et le câblage reliant le tableau de cette dernière au bâti de relais.

L'extension éventuelle de l'installation n'entraîne aucune modification dans la cabine de programme trements, deux voies d'amplification ont été supprimées et remplacées par un mélangeur double.

La numérotation du cadran permet de connecter une modulation sur chaque côté, droit ou gauche,



Fig. 9. — Consolette de programme S.F.R. avec boîte de commutation pour l'enchaînement des modulations.

du mélangeur double, donc de préparer l'enchaînement d'un studio pendant que l'autre est en service, ou encore de mélanger deux modulations.

Les manœuvres, qui sont très simples, permettent aisément au technicien assurant les commutations de studios de se consacrer à la prise de son speaker ou disque lorsque l'enchaînement a été effectué.

L'utilisation d'un matériel de cette conception

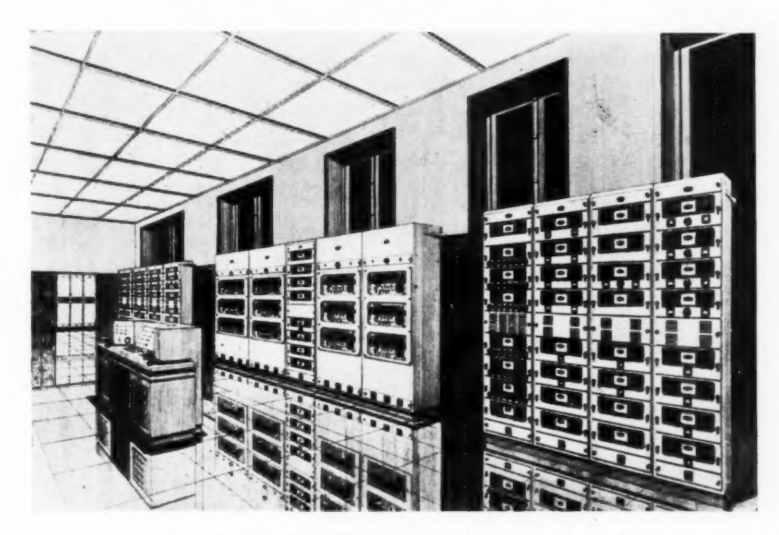


Fig. 10. — La salle technique de Radio Monte-Carlo (Installation S.F.R.).

et se traduit seulement par l'adjonction d'un bâti à relais dans la salle technique.

L'encombrement des organes de commande se réduit à une boîte de faibles dimensions, aisément associée à une console de prise de son normale adaptée, au moyen de modifications mineures, au travail particulier de la cabine de programme (*fig.* 9).

La prise de son étant, en effet, limitée au microphone « speaker » et à la reproduction des enregis- entraîne l'économie permanente d'une équipe de trois personnes, évite la construction d'une console spéciale pour la cabine de programmes, conduit à des dépenses d'installation beaucoup plus faibles et facilite considérablement les extensions (²).

(²) *Remarque.* — Bien que la solution précédemment décrite paraisse la plus intéressante aux points de vue économie et exploitation, le système préconisé se prête néanmoins

3.3. Salles techniques. — Chaque studio disposant d'une chaîne électroacoustique complète et les commutations se faisant dans les cabines de programmes, la salle technique joue un rôle moins important.

Elle est cependant indispensable pour assurer les liaisons et grouper les différents organes communs de l'installation : bâtis à relais, amplificateurs d'arrivée et de départ, récepteurs de contrôle et distribution des écoutes (*fig.* 10).

De telles liaisons peuvent d'ailleurs être réalisées au moyen de dispositifs automatiques analogues à celui utilisé à l'échelon programme.

Les commutations à prévoir sont d'ailleurs plus simples tant pour la distribution des écoutes de contrôle à l'intérieur du centre que pour l'envoi des programmes vers les émetteurs, lorsque le groupement de ces derniers est susceptible de varier.

L'importance des éléments constituant la salle technique est variable suivant les centres et dépend directement de leur programme d'exploitation.

4. Description du matériel.

4.1. Considérations générales. — *a.* La nécessité de *l'économie* doit exclure le superflu, mais ne doit pas réduire les performances techniques acquises, celles-ci au contraire doivent être surpassées grâce à une simplification de la fabrication et des travaux d'installation ainsi qu'à une réduction du volume des appareils;

b. Le *schéma* doit assurer l'indispensable, la *souplesse* de l'exploitation en accordant de justes valeurs aux marges de gain;

c. Le *groupement des organes* techniques a été fait en tenant compte de la valeur des éléments constituant le *prix de revient*, sans que jamais l'abandon de la qualité soit admis.

En conséquence le schéma théorique d'une chaîne, de la source à la ligne de modulation, a été composé en fonction de l'emploi de trois types d'amplificateurs :

— le préamplificateur type PMC;
— l'amplificateur de ligne type ALC;
— l'amplificateur d'écoute type PHC.

Tous ces amplificateurs sont constitués en utilisant une ou deux cellules à deux étages, possédant chacune un coefficient de contre-réaction important permettant à la fois de suivre un cahier des charges assez étendu pour les lampes et de réaliser des performances régulières, tant en gain qu'en distorsion de fréquences ou qu'en distorsion harmonique.

Le préamplificateur PMC est monté en chaîne simple; l'amplificateur de puissance PHC est monté en push-pull; ils possèdent chacun deux étages.

L'amplificateur ALC possède deux cellules à deux étages en chaîne simple, chaque cellule ayant son dispositif propre de contre-réaction. Les lampes des préamplificateurs PMC et la première cellule de l'amplificateur de ligne ALC, sont chauffées en courant redressé. Les lampes de la deuxième cellule de l'amplificateur de ligne ALC ainsi que les lampes de l'amplificateur d'écoute PHC sont chauffées en courant alternatif à 50 p : s.

Cette disposition tend à réduire encore les conditions de recette des lampes employées, en ce qui concerne les clauses relatives au bruit de fond dû au chauffage des filaments en courant alternatif. Les lampes des préamplificateurs, de l'amplificateur de ligne, du premier étage de l'amplificateur d'écoute sont du type PM 07. Les lampes du dernier étage de l'amplificateur d'écoute sont du type 6 AQ 5. Ces deux types de lampes sont classés dans la catégorie « miniature » et les conditions d'emploi qui leur sont imposées sont inférieures en dissipation aux valeurs fixées par le cahier des charges courant; de sorte que la durée de fonctionnement des cathodes est prolongée.

4.2. Schéma de principe de la consolette de prise de son type CST1 (*fig.* 11). — Les amplificateurs PMC sont utilisés de façon à permettre l'amplification des modulations fournies par quatre sources qui peuvent être, soit des microphones, soit des pick-up accouplés à un système de correction de lecture unique.

Le gain de ces quatre voies est réglé par quatre atténuateurs A_1, A_2, A_3, A_4 à haute impédance.

Les atténuateurs sont couplés et adaptés sur un atténuateur général A_7.

Le mélange des voies peut être obtenu par le dosage combiné des atténuateurs de ces voies.

L'atténuateur général attaque l'amplificateur de ligne ALC qui possède un transformateur de sortie adapté à une ligne de 600 Ω.

Le gain de travail de la chaîne est de 68-70 db et permet d'obtenir un niveau de sortie de + 12 db (3 V/600 Ω) sur la ligne de modulation avec une réserve totale d'amplification de 15 db sur chaque voie et 15 db sur l'atténuateur général.

La sortie des amplificateurs de voie PMC est connectée par un relais, soit sur une résistance de

---

à la centralisation des manœuvres de commutation des programmes entre les mains d'un seul responsable placé à la salle technique.

charge, soit sur l'atténuateur de voie. On peut donc, par le fonctionnement de chaque relais, éliminer ou utiliser la voie correspondante.

D'autres relais assurent le branchement et l'utilisation possible des haut-parleurs situés dans les studios et la cabine de son.

Il faut noter que, pour que les indications du Vumètre soient correctes, l'impédance de ligne doit être de 600 Ω.

Sur le panneau avant du châssis se trouvent des boutons poussoirs permettant de contrôler le courant anodique de chaque lampe. La lecture

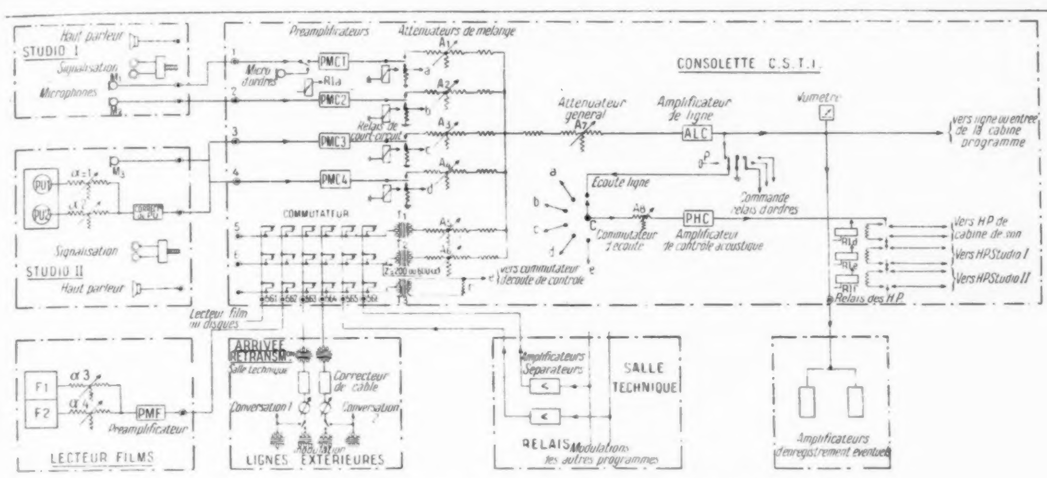


Fig. 11. — Schéma de principe de la consolette de prise de son type CST1.

On peut aussi de ce fait prendre la voie I amplifiée, pour permettre, grâce à un microphone local, à l'opérateur de la cabine de son, de donner des ordres dans les studios en répétition.

Les lignes auxiliaires, au nombre de six, peuvent être connectées par deux groupes de six clés asservies, sur deux transformateurs T_1 et T_2 qui adaptent les impédances de ligne (200 ou 600 Ω) au groupe de mélange par l'intermédiaire des atténuateurs A_5 et A_6.

Un groupe supplémentaire de six clés, permet de prendre l'écoute sur les voies auxiliaires par l'intermédiaire du transformateur T_3.

Le choix des écoutes est assuré par un commutateur C qui débranche l'entrée de l'amplificateur PHC de la ligne de modulation pour la transporter au choix de l'opérateur, soit sur le transformateur T_3, soit sur la sortie des préamplificateurs de voie.

Dans ce dernier cas, c'est seulement lorsqu'un préamplificateur est hors circuit, c'est-à-dire connecté sur sa résistance de charge de repos, que la tension d'écoute peut être utilisée, par exemple, pour écouter un studio en préparation.

Le niveau de modulation est contrôlé par un Vumètre branché en permanence sur la ligne de modulation.

est faite sur un appareil de mesure situé à droite du panneau.

4.3. Alimentation. — L'alimentation des lampes des amplificateurs est assurée par deux coffrets spécialisés.

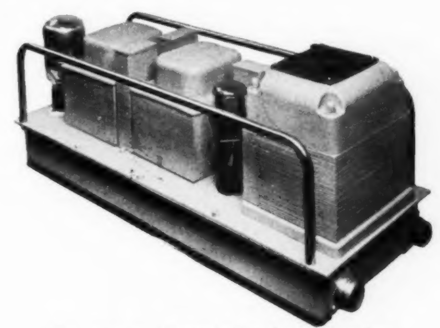


Fig. 12. — Alimentation haute tension.

Coffret haute tension. — Fournit, en partant d'un secteur 110 V à 50 p : s, une tension continue de 280 V stabilisée par lampe au néon. Consommation : 180 VA (*fig.* 12).

Coffret basse tension. — Fournit, en partant d'un secteur 110 V à 50 p : s, une tension de 6,3 V redressée

et filtrée. Cette tension est réglable par un rhéostat commandé par tournevis. Consommation : 55 VA.

Les deux coffrets d'alimentation peuvent se placer dans un des côtés du meuble-bureau, supportant la consolette (*fig.* 13).

Fig. 13. — Consolette de prise de son type CST1 sur le meuble support contenant les dispositifs d'alimentation haute et basse tension.

4.4. Signalisation (*fig.* 14). — Un système de signalisation est incorporé dans le châssis de la consolette. Il est conforme aux conditions d'exploitation de la Radiodiffusion française. Pratiquement, il permet la signalisation entre la « console de prise de son » et deux studios, d'une part et la réponse (suivant le même code) entre la « console de prise de son » et une « cabine de programme » :

— Chaque chef de studio dispose d'un petit pupitre portant trois poussoirs, dont deux asservis et trois voyants (blanc, vert, rouge);

— A l'intérieur du studio trois panneaux lumineux portent respectivement les significations de service : « Silence », « Répétition », « Antenne »; ces panneaux sont multipliés à la porte de chaque studio;

— Sur chaque « consolette de prise de son », l'opérateur dispose de deux groupes de signalisation et de commande pour studio, ainsi qu'un groupe de signalisation correspondant avec la cabine de programme. Celui-ci est identique à celui du chef de studio ;

— Le groupe de signalisation pour studio comprend : deux clés basculantes à trois positions, un bouton poussoir et six voyants (trois rouges, un blanc, un vert, un jaune).

L'exploitation de la signalisation se fait dans l'ordre suivant :

Au début, nous supposons que l'opérateur du son

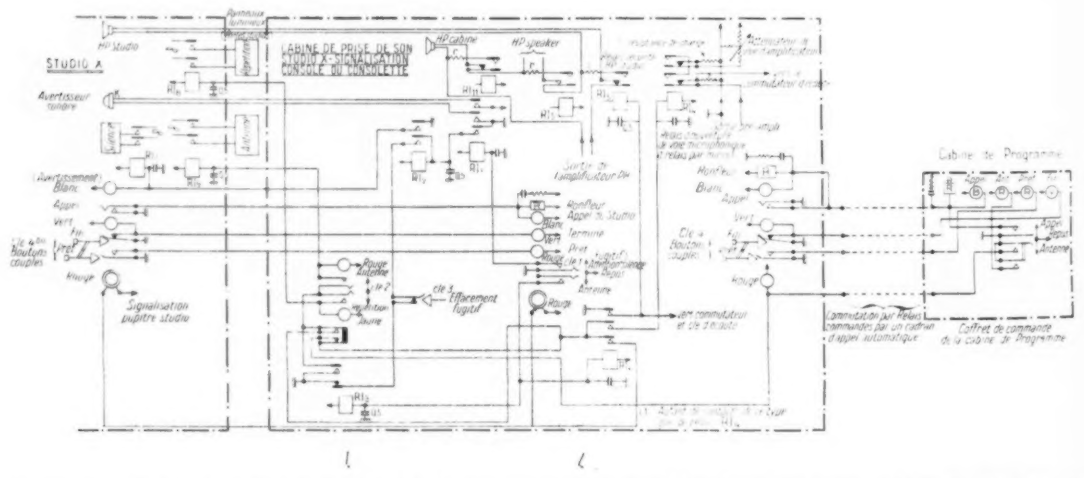


Fig. 14. — Schéma de principe des signalisations entre : studio et cabine de prise de son, cabine de prise de son et cabine de programme.

est averti par son emploi du temps que la prise de son considérée est destinée à une « Répétition ».

a. Il place la clé 2 sur la position « Répétition ».

b. Il appelle le studio en levant la clé 1 qui, à chaque impulsion, envoie un signal sonore dans le studio et allume la lampe blanche du pupitre; toutefois, dès la première impulsion, les panneaux « Silence » sont éclairés d'une façon permanente. Ce panneau peut être éteint par le bouton 3, si les signaux envoyés ne servent que d'avertissement.

Si le panneau « Silence » reste allumé, le chef de studio répond par son bouton d'appel que le signal a été compris, il s'assure que les artistes sont en place, prêts à l'exécution, il appuie alors sur le bouton « prêt » qui allume un des voyants rouges de la cabine de son et attend l'ordre fixant le départ.

L'opérateur de prise de son, recevant le signal « prêt » abaisse la clé 1; de ce fait :

c. Le voyant jaune s'allume sur son tableau lui confirmant qu'il est en position de « Répétition ».

d. Dans le studio, le panneau « Silence » s'éteint, les panneaux « Répétition » s'éclairent, ainsi que le voyant rouge « Antenne » du pupitre du chef.

e. Les relais qui isolaient les préamplificateurs de voie de la chaîne sont excités; alors la chaîne devient continue des sources de modulation à la ligne, tandis que le haut-parleur de studio est hors circuit.

f. En fin d'exécution, le chef de studio appuie sur son bouton « Fin », qui allume le voyant « vert » et éteint le voyant rouge « prêt » de la consolette. L'opérateur de son relève sa clé « Antenne », les panneaux s'éteignent et la chaîne du studio est coupée.

Le cycle de signalisation est terminé.

g. Si l'emploi du temps de la prise de son avait été affecté à la diffusion sur « Antenne »; l'opérateur de prise de son aurait placé sa clé 2 sur la position « Antenne ».

Dans ces conditions le cycle des manœuvres reste identique, mais lorsque l'opérateur de son abaissera sa clé 1 sur « Antenne », il préparera seulement les circuit des relais de bouclage des voies et d'allumage des signaux à recevoir le courant qui sera amené par la fermeture des contacts de la clé « Antenne » de la cabine de programme.

C'est alors seulement, lorsque l'opérateur de programme abaissera sa clé « Antenne » que les panneaux « Antenne » s'éclaireront en place des panneaux « Répétition », que le signal « Antenne » du pupitre du chef de studio s'allumera et que les relais de commutation des voies seront actionnés.

Le dispositif de signalisation, entre la cabine de son et la cabine de programme est identique au dispositif qui relie le studio à la cabine de son. Son fonctionnement sera étudié plus loin.

4.5. Réalisation et construction. — Tous



Fig. 15. — Consolette de prise de son type CST1 (vue avant, capot enlevé).

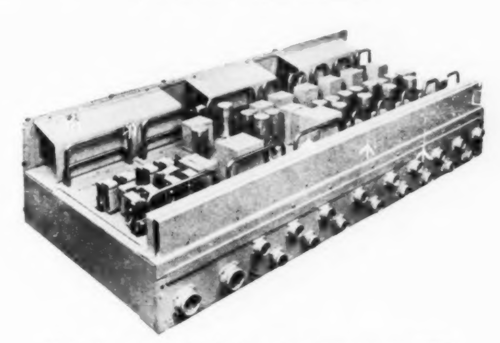


Fig. 16. — Consolette de prise de son type CST1 (vue arrière, capot enlevé).

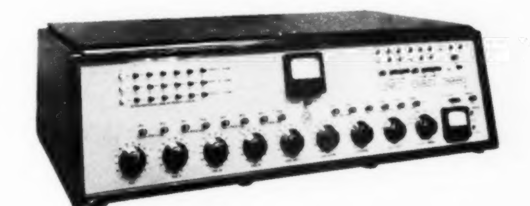


Fig. 17. — Consolette de prise de son type CST1 (vue d'ensemble).

les organes techniques sont groupés sur un même châssis technique (*fig.* 15 et 16) qui est placé dans un coffret métallique (*fig.* 17).

Ce châssis a été étudié de façon à fragmenter les opérations de montage et de câblage général.

Les amplificateurs :

— PMC (*fig.* 18);
— ALC (*fig.* 19);
— PHC (*fig.* 20);

— le bloc de retransmission (*fig.* 21); et
— le bloc de relais (*fig.* 22).

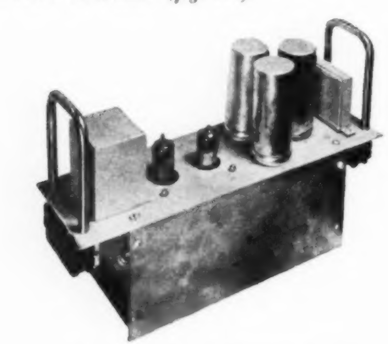


Fig. 18. — Amplificateur PMC.



Fig. 19. — Amplificateur ALC.

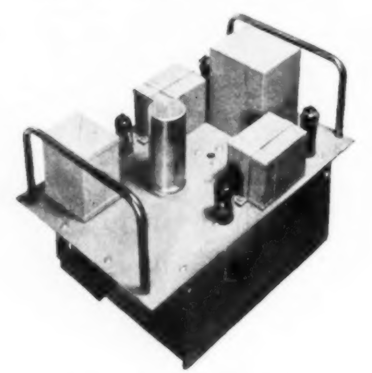


Fig. 20. — Amplificateur PHC.

sont réalisés sur une platine munie de deux poignées et de deux écrans électrostatiques.

Les connexions des platines au châssis sont assurées par des fichiers femelles, à enclenchement, situés aux extrémités des platines dans le plan des poignées.

Les groupes de clés de retransmission et de signalisation sont montés et câblés sur des platines qui



Fig. 21. — Bloc de retransmission.

viennent s'encastrer dans le panneau avant du châssis technique, et le toron de fils correspondant

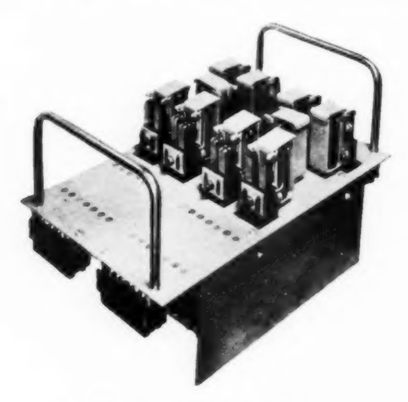


Fig. 22. — Bloc du relais.

à chaque tableau est porté et guidé par une gouttière (*fig.* 23).

Tous les organes de contrôle du panneau avant (atténuateurs, tâteurs, commutateurs, appareils de mesure) sont câblés entre eux et sur les fichiers mâles correspondant à chaque platine (*fig.* 24).

Le panneau arrière est divisé en deux parties (*fig.* 23) :

— la partie supérieure porte les relais de commande de son qui aboutissent aux fichiers portés par le même support;
— la partie inférieure porte toutes les fiches d'alimentation entrée et départ des lignes.

Il en résulte que le montage des éléments et le

câblage général peuvent être décomposés en dix postes possédant un schéma réduit et simple (les quatre amplificateurs PMC comptant pour un poste).

Les huit groupes de fils réunissant les panneaux avant et arrière sont supportés chacun par une qui réduit considérablement le temps de suspension d'exploitation.

En outre, tous les condensateurs électrolytiques des panneaux sont équipés avec des broches sur un culot octal.

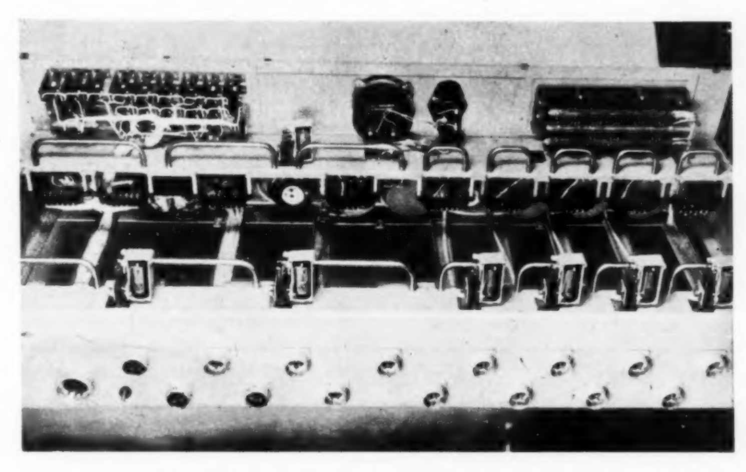


Fig. 23. — Vue arrière de la consolette de prise de son type CST1 (capot et amplificateurs enlevés).

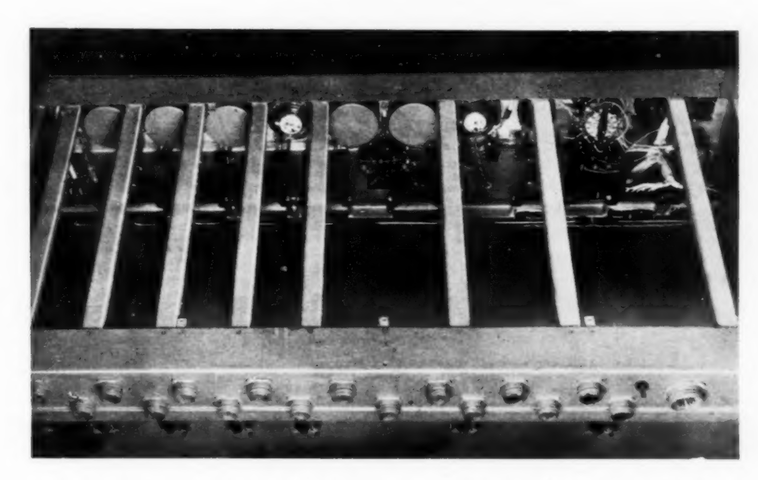


Fig. 24. — Consolette de prise de son type CST1 vue de dessous : détails de câblage des organes de contrôle.

gouttière perpendiculaire à la face avant et les groupes de fils sont immobilisés par des goupilles métalliques (*fig.* 23).

Le dispositif de branchement des panneaux amplificateurs, porte-relais ou transformateurs de ligne permet d'effectuer très rapidement le remplacement d'un de ces éléments tombé en panne, ce

Deux types de lampes seulement sont utilisés sur les amplificateurs.

Ce sont des pentodes miniatures type PM 07 et 6 AQ 5 à grande pente qui permettent des taux de contre-réaction élevés. Une consolette utilise 14 lampes PM 07 et 2 lampes 6 AQ 5.

4.6. Spécifications techniques. — Impédances des sources de modulation (entrées microphoniques, 50 ou 200 Ω; entrées auxiliaires, 200 ou 600 Ω) :

Impédance de sortie normale de l'amplificateur de ligne	600 Ω
Courbe de fréquence totale à ± 1 db	30-15 000 p : s
Niveau de sortie maximum	+ 12 db/600 Ω
Distortion non linéaire à + 12 db ([3])	< 1 % de 30 à 7 500 p : s
Gain en tension maximum (entrée 50, sortie 600)	100 db ± 2 db
Gain normal de travail	+ 65 à + 70 db
Bruit de fond pour un gain + 68 db (avec un niveau de sortie + 12 db)	— 65 db

Amplificateur d'écoute :

Impédance d'entrée	5 000 Ω
Impédance de sortie	5 ou 20 Ω
Gain en tension (rapport de tension d'entrée à tension de sortie sur 20 Ω) réglé en usine à	+ 30 ou + 20 db
Puissance de sortie normale (suivant le gain)	3 ou 4 W
Courbe de fréquence (± 1 db sur 20 Ω)	30 à 15 000 p : s
Distorsion non linéaire de 50 à 7 500 p : s ([3])	< 2 %

Dimensions :

Consolette (coffret)	Hauteur	315 mm
	Longueur (de la base)	1 100
	Largeur (de la base)	520
Bureau-support	Hauteur	780 mm
	Longueur	1 500
	Largeur	750

4.7. Consolette de programme type CSTP (*fig.* 25). — Cette consolette est pratiquement identique à la consolette de prise de son.

Elle possède le même châssis et les mêmes éléments (*fig.* 26), elle offre donc les mêmes garanties techniques que la consolette de prise de son et permet les mêmes performances.

Seule la composition intérieure est différente : elle ne contient que deux entrées amplifiées au lieu de quatre, mais les dispositifs de retransmission et de signalisation sont inchangés.

En fait, elle peut faire office de cabine de son pour « écran sonore » et, dans ce cas, son rôle est identique à celui d'une consolette de prise de son réduite qui viendra prendre sa place dans les enchaînements de programme.

Toutefois elle comprend en plus de la consolette de prise de son :

— *Un amplificateur* ALC de secours, qui peut être immédiatement enclenché à la place de celui en service, par deux relais inverseur R_1. Cet amplificateur vient occuper la place des deux amplificateurs PMC qui n'existent plus;

— *Un mélangeur double* qui vient occuper la place des deux atténuateurs précédemment affectés aux préamplificateurs PMC remplacés.

Le commutateur d'écoute de cette consolette permet le contrôle sonore :

a. des deux voies amplifiées;
b. des six lignes auxiliaires;
c. des deux entrées du mélangeur;
d. de la ligne de l'écran sonore;
e. de la ligne sortant du mélangeur.

Un commutateur spécial inverse les positions *d* et *e* suivant l'utilisation et branche en même temps le Vu-mètre de contrôle sur la ligne de modulation en service.

La fonction *Programme* de cet ensemble est assurée par un petit coffret adjoint à la cabine de programme (*fig.* 9).

Cette fonction, dans le présent dispositif consiste à connecter deux consoles de prise de son préalablement désignées sur les deux entrées du mélangeur double (les positions du mélangeur étant désignées par « droite » et « gauche » conformément au sens de rotation du bouton de commande du mélangeur).

Ceci étant posé, le coffret de commande porte en son milieu :

— un cadran d'appel téléphonique;
— une clé « droite », « gauche » à deux positions;
— un voyant « pas libre ».

Symétriquement sont placés à « droite » et à « gauche » :

— quatre voyants et une clé « antenne » assurant la signalisation entre la cabine de programme et les cabines de prise de son à asservir (*fig.* 14);

— un voyant indiquant que la position « droite ou gauche » est enclenchée. Ce voyant peut être multiplié sur un tableau général lumineux qui définira à tout moment, la position de travail des sources de modulation;

— un bouton-poussoir qui permet, en fin d'utilisation d'une console de prise de son, de libérer

([3]) Les distorsions sont mesurées au pont de distorsion, y compris la distorsion du générateur de fréquences.

les relais de commutation qui la connectaient à la console de programme.

La manipulation opératoire est la suivante :

Si l'opérateur doit enchaîner deux prises de son provenant de deux sources de son X et Y qui sont que son dispositif de signalisation répond au groupe de gauche.

Il peut alors transmettre ses signaux à la cabine Y et même écouter une répétition du programme sur son dispositif de contrôle acoustique en plaçant le bouton d'écoute sur voie gauche.

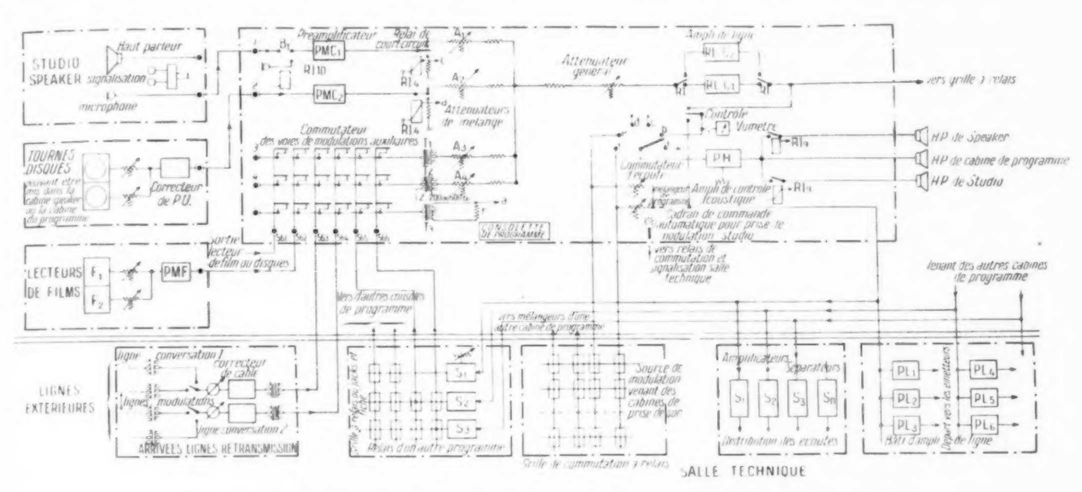


Fig. 25. — Schéma de principe de la consolette de programme type CSTP.

repérées chacune par un numéro d'appel à deux chiffres, par exemple 15 pour X et 25 pour Y (notons en plus que l'écran sonore de la consolette de programme est repéré par le chiffre 35) :

— il placera la clé du milieu sur la position droite;

— il composera sur le cadran le numéro d'appel 15 de la cabine X correspondant au premier programme. Si la cabine X est disponible, la lampe voyant « enclenché » de droite s'allumera et ce signal lui indiquera à la fois que la cabine X est libre et que sa ligne de son est connectée sur le secteur « droite » du mélangeur, tandis que son dispositif de signalisation répond au groupe de « droite » du coffret. Dans ces conditions, il n'a qu'à utiliser le groupe de signalisation correspondant pour appeler l'opérateur de la console X.

Ces opérations étant terminées, le programme de X passe en modulation sur la ligne.

Pendant que ce programme « passe », sous son contrôle, l'opérateur peut en plaçant la clé du milieu sur « gauche » appeler la cabine Y en composant le chiffre 25 sur le cadran d'appel.

Si la lampe voyant « enclenché » de gauche s'allume, cela lui indique que la cabine Y est connectée en modulation sur l'entrée gauche du mélangeur et

Lorsque le programme de X sera terminé, il en sera prévenu par la lampe voyant « fin » de droite et si la cabine Y lui a transmis le signal « prêt », il

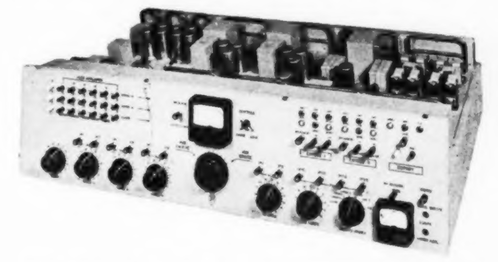


Fig. 26. — Consolette de programme type CSTP : vue avant capot enlevé.

pourra enchaîner la modulation en « fondu » en tournant le bouton du mélangeur de droite à gauche.

En appuyant sur le bouton « fin » du groupe de droite, il libérera la cabine X et pourra enclencher une nouvelle cabine de son sur la position droite.

On peut alors remarquer que, puisque la consolette de programme peut faire office d'écran sonore, l'opérateur pourra l'utiliser pour faire des annonces, passer des enregistrements ou des retransmissions.

Il n'aura dans ce cas qu'à composer sur le cadran

le chiffre 35 pour connecter sur l'une des entrées du mélangeur la ligne de l'écran sonore dont il dispose.

Cette possibilité permet donc de grouper les deux fonctions : « prise de son » et « programme » sous le contrôle d'un même opérateur.

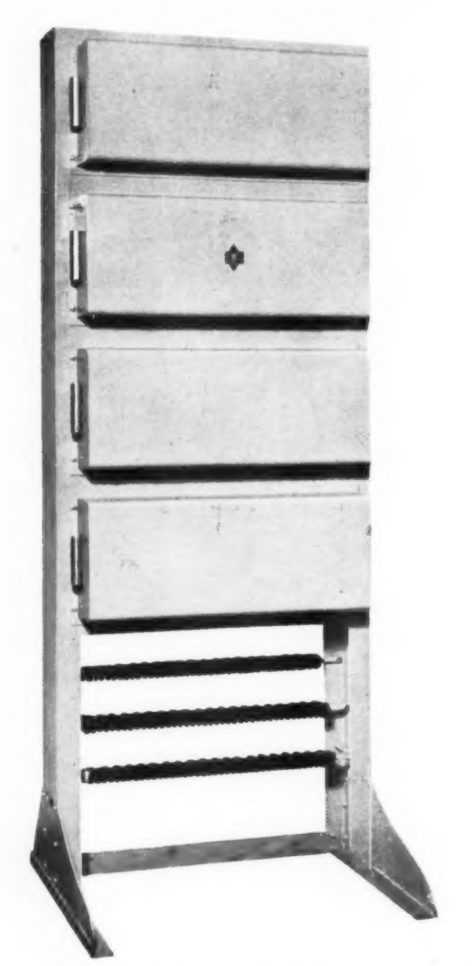


Fig. 27. — Châssis de relais de commutation automatique.

4.8. Dispositif de commande automatique. — Il est constitué par plusieurs groupes de relais :

a. Groupe de relais sélecteurs, obéissant aux impulsions du cadran d'appel semblable à un dispositif de téléphone automatique, mais cependant plus simple;

b. Groupe de relais de modulation, constituant la grille de répartition des sources de modulation sur les cabines de programme;

e. Groupe de relais de signalisation, semblable au groupe *b*, mais bouclant les circuits de signalisation des consoles de prise de son sur le coffret de commande d'une console de programme.

La figure 27 représente le châssis portant les différents groupes de relais nécessaires à l'interconnexion automatique de dix consoles de prises de son sur trois cabines de programme.

Hauteur	1,80 m
Largeur	0,70
Profondeur	0,20

Tous les groupes de relais sont sous capots étanches; ces capots se déboîtent facilement pour permettre un accès facile aux relais.

4.9. Amplificateurs de salle technique. — Pour compléter le dispositif de transmission des modulations vers un émetteur, nous avons créé deux types d'amplificateurs de ligne utilisables comme séparateurs pour multiplier la modulation sur divers câbles transportant la modulation vers un émetteur ou vers un centre d'écoute.

Ces deux types d'amplificateurs sont identiques comme présentation et montage à :

— l'amplificateur de ligne ALC, pour le séparateur d'écoute (*fig.* 19);

— l'amplificateur de puissance PHC, pour le séparateur de ligne (*fig.* 20).

Les groupes d'amplificateurs peuvent être montés dans un châssis consolette dont le panneau avant portera les atténuateurs d'entrée de chaque amplificateur et un Vu-mètre de contrôle commutable sur les entrées et sorties.

Les caractéristiques techniques de ces amplificateurs sont :

Séparateur de ligne :

Impédance d'entrée	15 000 Ω
» de sortie	30 à 100 Ω
» de charge	600 Ω
Gain	15 ± 1 db
Atténuateur d'entrée	20 db
Niveau de sortie maximum	+ 22 db/600 Ω
Distorsion harmonique pour un niveau de + 22 db	Inférieure à 0,5 %, de 50 à 7 500 p : s
Distorsion de fréquence	± 1 db de 20 à 20 000 p : s
Chauffage	Sous 6 V alternatifs
Lampes	4 du type PM 07
Bruit de fond (au-dessous du niveau, + 20 db)	— 65 db

Séparateur d'écoute :

Impédance d'entrée	10 000 Ω
» de sortie	100 Ω ± 15 %
» de charge	200 ou 600 Ω (*)
Gain	8 ± 1 db/600 Ω
Atténuateur d'entrée	20 db
Niveau de sortie maximum	+ 12 db/600 Ω
Distorsion harmonique pour un niveau de + 12 db/600 Ω	Inférieure à 1 %, de 50 à 7 500 p : s
Distorsion de fréquence	± 1 db, de 20 à 20000 p : s
Chauffage	Sous 6 V alternatifs
Lampes	2 du type PM 07
Bruit de fond (au-dessous du niveau, + 12 db)	— 65 db

(*) (600 Ω en désadapté) pouvant être adaptés sur demande à 50 Ω.

5. Conclusions.

La S.F.R. après avoir examiné de façon approfondie les différentes méthodes d'exploitation des studios, en a dégagé les principes susceptibles de conduire au meilleur rendement du personnel et du matériel.

La recherche de la meilleure productivité lui a permis de mettre au point un groupement de consolettes dont les performances techniques sont équivalentes ou supérieures à celles des meilleurs matériels français ou étrangers.

Le montage des consolettes de différents modèles a été réalisé dans un même type de châssis dont la conception se prête à une fabrication économique, même en série d'importance relativement réduite.

La répartition des organes présente, en outre, une certaine souplesse grâce à laquelle il est possible de composer des ensembles répondant exactement aux demandes de la clientèle sans entraîner pour cela des mises au point particulières, qui, généralement bouleversent les conditions d'exécution, entraînant de ce fait une augmentation importante des prix de revient.

La concentration en un même meuble des éléments d'amplification et de mélange réduit les dimensions des locaux nécessaires à l'exploitation, évite des liaisons coûteuses par caniveaux, diminue les délais d'installation, rend les ensembles plus amovibles et concentre tous les organes de commande entre les mains d'un opérateur qui peut assurer seul les différentes manœuvres.

La standardisation d'une même technique appliquée aux différents groupes réduit les stocks de rechange et permet l'adaptation immédiate des opérateurs aux différents postes.

Le nombre total de techniciens nécessaires se trouve, d'autre part, réduit par la conception du schéma général d'exploitation.

Enfin, grâce à la souplesse de conception, le matériel se prête aisément, dans les domaines de l'enregistrement sonore et de la reproduction, soit à une extension de ses possibilités par adjonction de correcteurs et filtres, soit à une extension éventuelle du centre basse fréquence.

INFORMATIONS GÉNÉRALES.

NOUVELLE RÉALISATION DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIOÉLECTRIQUE ÉMETTEUR DE RADIODIFFUSION DE LUXEMBOURG.

Construit par la S. F. R. pour la Compagnie Luxembourgeoise de Radiodiffusion, le nouvel émetteur de Luxembourg, qui vient d'être mis en service, rayonne sur une longueur d'onde de 208 m, avec une puissance de 150 kW (1).

De conception entièrement nouvelle, cet émetteur est doté de tous les perfectionnements imposés par les progrès constants de la technique moderne.

Les efforts des ingénieurs et techniciens ont été concentrés sur quatre points essentiels : rendement élevé, qualité de l'émission, facilité et sécurité d'exploitation.

Les essais, effectués en présence du Directeur de l'Union Européenne de Radiodiffusion et de représentants de la Radiodiffusion française, ont prouvé que les buts recherchés étaient pleinement atteints :

a. **Rendement global.**

Le rapport entre la puissance porteuse délivrée et la puissance consommée atteint 52 %.

b. **Qualité de l'émission.**

Les mesures de bruit de fond ont montré que le rapport entre la modulation résiduelle en porteuse et la modulation à 100 % à 1000 p : s est de 61 db (moins de 1/1000e).

La distorsion harmonique ne dépasse pas 2 % entre 30 et 10 000 p : s.

Les courbes de réponse amplitude-fréquence et amplitude-amplitude sont dans le cadre imposé par le Cahier des Charges de la Radiodiffusion française. En particulier la courbe de réponse en fréquence est rectiligne à :

0,5 db près dans la bande 100-5 000 p : s;
1 db près pour 8 000 p : s;
2 db près pour 10 000 p : s;
1,5 db près pour 50 p : s;
2,2 db près pour 30 p : s.

(1) Le programme diffusé par cet émetteur n'est pas destiné à l'auditoire français; de plus, les antennes ne sont pas prévues pour couvrir la Région Parisienne.

Les mesures d'harmoniques haute fréquence effectuées par la Compagnie Luxembourgeoise de Radiodiffusion ont donné des résultats excellents.

c. **Facilité d'exploitation.**

Pour faciliter la tâche du personnel exploitant, toutes les commandes et signalisations sont concentrées sur un panneau de 30 cm de côté, placé au centre du pupitre de contrôle basse fréquence.

Les dispositifs de sécurité indispensables pour le personnel et le matériel sont simplifiés au maximum tout en présentant une efficacité certaine.

L'ensemble est d'une présentation moderne, sobre, élégante et d'un encombrement réduit : l'enceinte de l'émetteur, des alimentations et des auxiliaires couvre une surface de 54 m² (9 m × 6 m). Cependant les organes de réfrigération et les transformateurs de puissance sont placés en dehors de cette enceinte.

d. **Sécurité d'exploitation.**

Les constatations effectuées montrent que l'émetteur est largement dimensionné : la puissance délivrée peut être portée à 164 kW au lieu des 150 kW garantis.

Le redresseur haute tension utilisé, d'un type entièrement nouveau (1), est d'une robustesse et d'une souplesse remarquables; en particulier, le blocage par grille et la réapplication de la pleine tension s'effectuent en moins d'une seconde.

Un essai d'endurance de 18 h consécutives en modulation de programme n'a donné lieu à aucun incident ni à aucun échauffement anormal.

Après les excellentes performances enregistrées aux essais, on peut conclure que la S.F.R. vient de présenter un matériel de très grande classe qui peut être placé au premier rang des productions internationales dans le domaine des Émetteurs de Radiodiffusion.

(1) Sous licence « English Electric ».

ESSAIS COMPARATIFS DE LIAISON EN MODULATION D'AMPLITUDE ET EN MODULATION DE FRÉQUENCE EFFECTUÉS PAR LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIOÉLECTRIQUE

Des essais ont été entrepris dans la Région parisienne pour comparer les réceptions en modulation d'amplitude et en modulation de fréquence. Une station fixe a été installée à Levallois. Elle comprenait :

— un ensemble à modulation de fréquence travaillant sur 163,6 Mc : s avec une puissance antenne de 10 W, la sensibilité du récepteur étant de 1 μV pour une déviation de $\pm$ 5 Kc : s à 1 000 c : s et un rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ de 20 db ;

— un ensemble à modulation d'amplitude travaillant sur 96,3 Mc : s avec une puissance antenne de 5 W, la sensibilité du récepteur étant telle que 1 μV modulé à 30 % à 1000 c : s donne 50 mW de B. F. pour un rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ de 9 db.

Les antennes de chacun des ensembles étaient constituées par des *quarts d'onde à plan de sol* disposés à 8 m environ au-dessus du sol.

Les postes mobiles, de mêmes caractéristiques que les ensembles de la station fixe, étaient installés dans des voitures, les antennes étant placées sur le toit.

Les premiers essais ont eu lieu en suivant la Seine vers le Nord-Est, c'est-à-dire dans une direction où les antennes étaient masquées par les bâtiments voisins.

La liaison, correcte au début, déclina ensuite rapidement entre le pont de Saint-Ouen et le pont de Saint-Denis où les usines sont très nombreuses. A l'Ile Saint-Denis, soit à 7 km du poste fixe, la liaison était perdue sur les deux postes. Elle s'est améliorée ensuite en rejoignant Levallois par Gennevilliers et Asnières.

Il est à signaler que la réception sur le poste à modulation d'amplitude était très gênée par les parasites des voitures rencontrées.

D'autres essais ont été effectués dans Paris pour se rendre compte de l'influence de ces parasites. Dès la place des Ternes, soit à 2,5 km de la station fixe, la liaison était très difficile avec le poste à modulation d'amplitude, alors qu'elle était excellente avec le poste à modulation de fréquence. De la place des Ternes aux Buttes-Chaumont, la liaison a été interrompue sur le poste à modulation d'amplitude. L'itinéraire emprunté (Ternes, Étoile, boulevard Haussmann, rue de la Boétie, place Saint-Augustin, Gare Saint-Lazare, Opéra, place de la République), était encombré par une très nombreuse circulation et les parasites des voitures empêchaient d'entendre les appels de la station fixe.

La liaison s'est ensuite améliorée sur le chemin du retour ; le poste à modulation d'amplitude a repris le contact aux Buttes-Chaumont, endroit bien dégagé par rapport au poste fixe et distant de 8,5 km. La liaison a été continuellement maintenue sur le chemin du retour, mais parfois dans de très mauvaises conditions en raison du niveau élevé des parasites dus à une circulation très intense.

Le poste à modulation de fréquence n'a jamais perdu le contact pendant toute la durée de l'essai.

Nous avons pensé que la liaison pouvait être améliorée en dégageant davantage les antennes du poste fixe. Elles ont été installées à environ 25 m au-dessus du sol. La liaison ainsi réalisée a été nettement supérieure aux précédentes. Le poste à modulation de fréquence n'a jamais perdu le contact. Avec le poste à modulation d'amplitude, la liaison a été interrompue entre les Invalides (5 km) et le haut du boulevard Lefèvre (8 km). Les parasites émis par les voitures sont toujours gênants sur cette liaison.

Il nous a ensuite paru intéressant de contrôler de la qualité des liaisons dans des endroits éloignés de tous parasites extérieurs et à plus grande distance du poste fixe.

Nous avons donc suivi la Seine jusqu'au pont de Suresnes où nous avons pris la route de Versailles. Les deux liaisons ont été excellentes jusqu'au pont Noir, endroit pourtant très encastré et entouré d'arbres (distance du poste fixe, 9 km environ). Elles ont ensuite légèrement baissé dans la traversée de Ville-d'Avray (10 km) pour redevenir confortables en haut de la côte de Picardie (12,5 km) et de nouveau médiocres dans Versailles en direction du Chesnay (15 km). Bonne réception au-dessus de l'autoroute de l'Ouest et dans les rues de Saint-Germain (13 km). Dans la forêt de Saint-Germain, la liaison a été maintenue sur les deux ensembles

aux Loges, à la Croix-de-Noailles (14 km) et au-dessus du triage d'Achères (14,5 km). A Conflans (17 km), le poste à modulation d'amplitude a perdu le contact qui a été néanmoins conservé par le poste à modulation de fréquence lors de la traversée de la Seine et le long des quais. La liaison a été assurée par les deux ensembles à Eragny (19 km), interrompue pendant la traversée de Saint-Ouen-l'Aumône (20,5 km), reprise par le poste à modulation de fréquence à Pierrelaye (19 km) et par le poste à modulation d'amplitude à la Patte d'Oie d'Herblay (13,5 km). La liaison a été ensuite correcte sur le chemin du retour.

Conclusions.

Dans les agglomérations où la circulation et les parasites industriels sont très importants, la modulation de fréquence est nettement supérieure à la modulation d'amplitude, car les parasites n'ont que peu d'influence sur elle.

Dans des régions où la circulation est très faible, et les parasites industriels peu nombreux, les liaisons réalisées avec des postes à modulation de fréquence ou à modulation d'amplitude sont à peu près équivalentes au point de vue portée et qualité de modulation.

SOMMAIRE

Imp. GAUTHIER - VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS
140388

Le Gérant : O. BRIX.

